

Korpuskularstatistische Begründung der Quantenmechanik

Von FRITZ BOPP

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Universität München

(Z. Naturforschg. 9a, 579–600 [1954]; eingegangen am 28. Februar 1953, umgearbeitet am 26. Dezember 1953)

Es wird versucht, die Quantenmechanik als eine nicht auf die Newtonsche Mechanik zurückführbare, rein statistische Bewegungslehre von Teilchen zu formulieren. Der Wellencharakter der statistischen Bewegungsgesetze ergibt sich zwangsläufig aus der Besonderheit der quantenmechanischen Statistik, nach der die Umkehrbarkeit der Bewegungen mit Diffusionerscheinungen verbunden ist. Die Existenz von Teilchen erweist sich hierbei als Voraussetzung für die von Wellen.

„Was uns unbefriedigt läßt, ist im Grunde nicht, daß die alten Anschauungen versagen, sondern daß an ihre Stelle nichts unmittelbar verständliches Neues tritt.“

1. Über die Natur der Materiewellen

Wir können diese Untersuchung kaum treffender einleiten als mit obigem Satz. Denn er erklärt, warum wir eine Frage aufgreifen, die nach fast allgemeiner Ansicht längst beantwortet zu sein scheint. Er lehrt nicht nur dem in der letzten Zeit wieder sehr lebendig gewordenen Unbehagen über die gegenwärtige Situation der Erkenntnis in der Quantenmechanik Ausdruck², sondern er zeigt auch einen Weg, auf dem man hoffen kann, zu neuen Ufern zu gelangen, wenn es solche jenseits der so gründlich ausgeloteten Untiefen noch gibt.

Man gelangt zu den geforderten neuen Vorstellungen, wenn man nach der Natur der Materiewellen fragt. Diese Frage erscheint berechtigt, weil es bereits in der klassischen Physik zwei nach ihrer Natur sehr verschiedene Arten von Wellen gibt, die Wellen in einem elastischen Medium und die Wellen in einem Feld. Seit den Tagen Maxwells sind die letzten immer stärker in den Brennpunkt der Aufmerksamkeit gerückt, so daß die Eigenart der ersten fast vergessen ist, was es notwendig macht, sich auf den Unterschied beider neu zu besinnen.

Im elastischen Medium beschreiben die Wellen die Beziehungen zwischen den Schwingungszustän-

den von im Raum verteilen Oszillatoren. Ohne die Oszillatoren gäbe es keine elastischen Wellen. Die Existenz von Wellen setzt also hier die von Partikeln voraus. Die Energie in einem solchen Wellenfeld ist durch die kinetische und potentielle Energie der Oszillatoren bestimmt. Die Wellenfunktionen stellen zwar dar, wie Energie und Impuls im Raum verteilt sind und wie sie von Oszillatoren zu Oszillatoren wandern. Aber sie sind nicht selbst Träger von Energie und Impuls. Sie haben also keinen substantiellen Charakter. Sie beschreiben vielmehr die Vorgänge zwischen Oszillatoren in anschaulicher Weise, genauer gesagt, gerade in der Weise, wie wir Wasserwellen oder Wellen erleben, die über ein Getreidefeld streichen.

Erst die Erkenntnis, daß die elektromagnetischen Wellen nicht als Wellen in elastischen Medien betrachtet werden können, hat allmählich zu einer zweiten, von der ersten wesentlich verschiedenen Vorstellung geführt, nach der die mit Feldern verbundenen Wellen substantiell aufgefaßt werden. Nach ihr sind die Felder selbst Träger von Energie und Impuls. Nur wenn man dies annimmt, ergibt sich die oft angeführte Unverträglichkeit von Partikel- und Wellenvorstellung. In der Tat können Energie und Impuls nicht zugleich im Raum ausgebreitet und in Partikeln konzentriert sein.

Angesichts zweier so verschiedener Möglichkeiten der Vorstellung ist es nicht von vorneherein klar, welches die Natur der Schrödinger-Wellen ist. Man muß darum mit der Möglichkeit rechnen, daß die

¹ C. F. v. Weizsäcker, „Zum Weltbild der Physik“, 2. Aufl., Hirzel 1944, S. 30–31.

² Die große Zahl der einschlägigen, aber oft sehr verschiedene Wege gehenden Arbeiten führen wir nach ihren Autoren alphabetisch geordnet an:

D. Bohm, Phys. Rev. **85**, 166, 180 [1952].

L. DeBroglie, „La physique quantique, restera-t-elle indeterministe?“ Gauthier-Villars 1953.

J. Fenyves, Z. Phys. **132**, 81 [1952].

L. Janossy, Ann. Phys. (6) **11**, 323 [1953].

E. Schrödinger, „Are there quantum jumps?“ The Bristol Journ. for the Philosophy of Science, Vol. III, No. 10, 11, 1952.

W. Weizel, Z. Phys. **134**, 264; **135**, 270 [1953].



Schwierigkeiten der Interpretation der Quantenmechanik auf der Verwendung einer ungeeigneten Wellenvorstellung beruhen. Gegen eine solche Erwartung kann man allerdings einiges einwenden, was auf den ersten Blick sehr bestechend erscheint, was aber genauer betrachtet kaum stichhaltig ist.

Der erste Einwand lautet: Die atomphysikalischen Erfahrungen zeigen, daß dem Dualismus zwischen materiellen Partikeln und Materiewellen der zwischen Lichtwellen und Lichtquanten zur Seite steht, so daß es ausgeschlossen erscheint, daß der Charakter von Materiewellen ein anderer sei als der von Lichtwellen. — Niemand wird diese Feststellung bestreiten wollen. Doch ist dagegen zu halten, daß wir oben zwar die gegenwärtige Vorstellung von elektromagnetischen Wellen dargestellt haben, daß aber daran nur die Feststellung unhypothetisch ist, daß elektromagnetische Wellen einen anderen Charakter haben als elastische. Die substantielle Auffassung der Wellenfelder ist jedoch keineswegs in gleichem Maße gesichert. Wir wissen von ihr nur, daß sie, soweit Ausbreitungsvorgänge in Frage kommen, nicht zum Widerspruch mit der Erfahrung führt. Die Notwendigkeit einer Quantentheorie der Wellenfelder zeigt, daß eine kritische Prüfung dieser Wellenvorstellung erforderlich ist. Ohne hier auf die Kritik der Vorstellung substantieller Wellen einzugehen, die nicht Aufgabe der Quantenmechanik im engeren Sinne sein kann, lernen wir aus dieser Betrachtung, daß man, von den elektromagnetischen Wellen in *klassischer* Auffassung herkommend, nichts Verbindliches über die Natur der Schrödinger-Wellen sagen kann.

Ein zweiter Einwand könnte so formuliert werden. Zwar haben die elastischen Wellen in kontinuierlichen Körpern bei der Entwicklung der Wellenvorstellung Pate gestanden. Nachdem sich aber herausgestellt hat, daß es materielle Kontinua in Wirklichkeit nicht gibt, können wir überhaupt nicht mehr in Strenge von elastischen Wellen sprechen. Elastische Körper sind nichts anderes als gekoppelte Oszillatoren. Was Wellen sind, kann man darum nur noch erfahren, wenn man Felder betrachtet. Damit fällt die Möglichkeit fort, von verschiedenen Arten von Wellen zu sprechen. — Hier geht es um die Definition des Wellenbegriffs. Man kann durchaus die Auffassung vertreten, die Vorgänge in einem elastischen Körper nicht mehr als Wellenvorgänge anzusprechen. Doch hätte eine solche Einengung des Wellenbegriffs zur Folge, daß man aus der Existenz von Interferenzen nicht mehr eindeutig auf

die Existenz von Wellen schließen könnte. Denn Interferenzen gibt es im elastischen Körper, gleichviel wie man die Schwingungsvorgänge bezeichnet. Auch dieser Einwand führt darum nicht an der Frage vorbei: Welches ist die Natur der Schrödinger-Wellen?

Er zeigt darüber hinaus, daß es darauf ankommt, zu definieren, was Wellen sind. Wir wollen diese Definition so einrichten, daß wir von der Existenz von Interferenzen auf die von Wellen schließen dürfen. Wir gelangen zu ihr, wenn wir die den beiden klassischen Vorstellungen gemeinsamen Merkmale herauschälen. Sicher ist dann der Substanzcharakter nicht notwendig mit der Wellenvorstellung verbunden. Doch gehört dazu, daß wir lokal Schwingungen haben und daß die Schwingungen in verschiedenen Punkten miteinander verkoppelt sind, derart daß sich Schwingungszustände über den ganzen Raum ausbreiten können. Was schwingt und wie die Schwingungen miteinander verkoppelt sind, ist für die Existenz von Wellen und für ihre Ausbreitung gleichgültig. Es ist sogar unwichtig, ob die Oszillatoren kontinuierlich verteilt sind wie in einem klassischen Feld oder diskret wie in einem elastischen Körper. Dagegen ist die Voraussetzung von Oszillatoren unabdingbar. Denn wenn die miteinander verkoppelten Zustände nicht solche von Oszillatoren sind, erhält man statt der Wellenvorgänge Ausgleichungsvorgänge wie die Wärmeleitung.

Wie steht es nun mit den Schrödinger-Wellen, wenn wir sie im Lichte dieser Definition betrachten? Da sich bei elastischen Wellen Teilchen- und Wellenvorstellung nicht widersprechen, sondern ergänzen, können wir nicht mehr ohne weiteres schließen, daß aus dem Dualismus „Nichtobjektivierbarkeit“³ folge. Freilich können wir auch jetzt mit dem einzelnen Teilchen keine Wellenvorstellung verbinden. Denn ein solches ist in jedem Augenblick an einem bestimmten Ort und kann daher nicht zugleich eine Mannigfaltigkeit im Raum verteilter Oszillatoren darstellen. Aber die Lage ändert sich sofort, wenn wir eine *statistische Gesamtheit von Einzelteilchen* betrachten. Denn dann haben wir in jedem Volumen des Raumes eine bestimmte Wahrscheinlichkeit, daß Teilchen gerade in ihm zu finden, die zwischen 0 und 1 variieren und unter Umständen oszillieren kann. Auch besteht eine Kopplung zwischen verschiedenen Raumelementen. Denn die Veränderung der Wahrscheinlichkeit an einer Stelle

³ C. F. v. Weizsäcker, I. c.¹, S. 90—94.

muß gegenläufige Änderungen in der Umgebung hervorrufen. Es gibt also unter der Voraussetzung, daß die lokalen Wahrscheinlichkeiten oszillieren, *Wahrscheinlichkeitswellen*.

Der Begriff „Wahrscheinlichkeitswelle“ ist in der Quantenmechanik seit langem gebräuchlich. Manche Autoren sprechen bereits bei der Bohr-Heisenbergschen Auffassung von einer „interpretation purement probabiliste“⁴. Aber angesichts der oben eingeführten Wahrscheinlichkeitswellen kann man die Bohr-Heisenbergsche Theorie nicht „rein“ statistisch nennen. Denn in ihr sind Wellen und Teilchen gleichberechtigte, wenn auch etwas unvollkommene Bilder der Materie, deren Gültigkeitsbereiche, da sie einander widersprechen, begrenzt werden müssen. Erst diese Begrenzung bringt ein statistisches Element in die Theorie.

Wir haben im Gegensatz hierzu im strengen Sinne des Wortes die rein statistische Interpretation vor Augen. Die Wellen beschreiben nichts anders als Wahrscheinlichkeiten. Sie haben insbesondere keine substantielle Bedeutung. Darum gibt es keinen Widerspruch zwischen Wellen und Teilchen. Die Existenz von Wellen setzt sogar die von Teilchen voraus. Die Wellen sind Ausdruck des Bewegungsgesetzes. In all diesen Punkten gleichen sie mehr den elastischen als den elektromagnetischen Wellen. Sie unterscheiden sich von jenen nur darin, daß sie nicht die Bewegung einer realen Gesamtheit von vielen Teilchen streng beschreiben, sondern die einer gedachten Gesamtheit von Einzelteilchen statistisch.

Ob Wahrscheinlichkeitswellen in dem hier angegebenen Sinne wirklich existieren, geht aus dem Bisherigen noch nicht hervor. Die Möglichkeit einer rein statistischen Auffassung hängt noch davon ab, ob die Wahrscheinlichkeiten oszillieren können. Wie der Vergleich mit Diffusionsvorgängen zeigt, haben statistische Gesetze gewöhnlich Ausgleichungsscharakter. Tatsächlich scheint eine erste Prüfung zu beweisen, daß eine rein statistische Interpretation scheitern muß.

Dem ist aber nicht so! Wir werden im folgenden die Bedingungen angeben, unter denen die Wahrscheinlichkeiten oszillieren können. Wenn wir hier das Ergebnis vorwegnehmen, welches wir in den Ziff. 2—6 nur schrittweise zu entwickeln vermögen,

dürfen wir abschließend feststellen: *Die rein statistische Auffassung mit allen oben formulierten Konsequenzen ist möglich.*

Soviel sei über die Aufgabe gesagt, die wir uns gestellt haben, — und über das erreichte Ergebnis. Wir können keine Aussagen darüber machen, warum die atomaren Gesamtheiten, die wir mit unsren Versuchsanordnungen herstellen können, gerade die Eigenschaften haben, die wir im folgenden voraussetzen müssen. In jeder Theorie gibt es solche Fragen. Sie stecken die Grenzen ab, innerhalb deren das Geschehen rational erklärt wird, und sie bezeichnen die Punkte, von denen aus, wenn die Zeit dazu reif ist, neue Erkenntnisse gewonnen werden können. Bleiben wir innerhalb der abgesteckten Grenzen, so dürfen wir fragen, ob die hier zu begründende Auffassung die Rückkehr erlaubt „à des conceptions claires, cartésiennes, respectant la validité du cadre de l'espace et du temps“, wie sie DeBroglie⁵ fordert, obgleich wir, statt von der statistischen Auffassung loszukommen, nur eine radikalere anzubieten haben.

2. Reproduzierbarkeit

Nach dem in Ziff. 1 entwickelten Programm richten wir unsere Aufmerksamkeit auf die atomaren Ereignisse. Das sind Nebelpuren in Wilson-Kammern, Schwärzungsspuren in photographischen Schichten, Szintillationen auf Leuchtschirmen, Entladungen in Zählrohren u. dgl. Dem Höhenstrahlungsphysiker ist diese Einstellung ganz geläufig. Ihm verdanken wir die zugespitzte Bedeutung des Wortes „Ereignis“, „event“. Ein Ereignis ist ein räumlich und zeitlich begrenzter Geschehensakt.

Nicht ganz in Übereinstimmung mit manchen Darstellungen betrachten wir Interferenzringe und ähnliche Erscheinungen als Ansammlungen einer großen Anzahl von Spuren von Geschehensakten⁶. Zwar haben wir makrophysikalisch den Eindruck einer kontinuierlichen Intensitätsverteilung. Aber es steht außer allem Zweifel, daß wir, wenn erst die Intensität hinreichend klein ist, auch in diesem Fall nicht mehr Ringe, sondern Szintillationen oder sonstige Spuren einzelner Einschläge beobachten, deren relative Häufigkeiten sich nach der Intensitätsverteilung des scheinbar kontinuierlichen Bildes richtet.

⁴ L. DeBroglie, l. c.², S. 22.

⁵ L. DeBroglie, l. c.², S. 20, Abs. 2.

⁶ Vgl. die gegensätzliche Formulierung von M. Planck in „Vorträge und Erinnerungen“, Hirzel 1949, S. 201, Abs. 2.

Man kann diese Auffassung durch die beiden folgenden Experimente prüfen, die bei gleicher Versuchsanordnung je nach der Dauer der Beobachtung Ereignisse oder Interferenzringe liefern. In dem einen beobachtet man mit kleinen Zählrohren, daß bei hinreichend schwacher Intensität nur *selten* Entladungen und nur *zufällig* Koinzidenzen vorkommen. In dem andern Experiment, das mit derselben Versuchsanordnung und vor allem mit der gleichen Intensität ausgeführt wird, zeigen sich nach hinreichend langer Bestrahlung einer photographischen Schicht kontinuierlich erscheinende Interferenzringe. Bei geringer Intensität sind also die Beugungsringe aus den Spuren vieler Geschehensakte zusammengesetzt. Da sich die Natur der Erscheinung mit der Intensität nicht ändert, muß die vorangegangene Feststellung allgemein gelten. Wir brauchen also nur Geschehensakte zu betrachten.

Welche Ursachen lösen solche aus? Wenn wir etwas anders annehmen würden als Teilchen, die räumlich mindestens so begrenzt sind wie die kleinsten Bereiche, in denen sie Ereignisse auszulösen vermögen, könnten wir schwerlich von Ursachen reden, weil die Frage offen bliebe, warum stets nur ein Bereich anspricht. Darum zeigt ein Ereignis an, daß am Ort des Indikators im Augenblick des Geschehens ein Teilchen vorhanden ist. Wir definieren also Teilchen als Inbegriff der Ursachen möglicher Ereignisse, so, wie man gelegentlich Felder als Inbegriff möglicher Kraftwirkungen verstanden hat.

Nun ist zu beachten, daß die der Beobachtung von Teilchen dienenden Ereignisse den ungestörten Ablauf des Geschehens radikal unterbrechen. Es ist darum nicht möglich, den Ort eines einzelnen, ungestörten Teilchens mehr als einmal zu beobachten. Nur oftmalige Wiederholung desselben Versuches jeweils mit anderen Teilchen kann über die Geschehensfolge Aufschluß geben. Erst sie erlaubt uns, davon zu sprechen, wie Teilchen im Laufe der Zeit ihre Lage ändern. Wir müssen also stets eine Gesamtheit von Teilchen vor Augen haben, wenn wir über die ungestörte Bewegung eines Teilchens eine Aussage machen wollen.

Es ist offensichtlich, daß diese Teilchenvorstellung allgemeiner ist als die der klassischen Mechanik. Denn mit dem Gesagten ist verträglich, daß sich Teilchenbahnen verzweigen können, wie man

es bei Erzeugungsprozessen beobachtet, und es wäre denkbar, daß sich Teilchen wie die Schaumkronen auf Wasserwellen, um ein Bild von Schrödinger zu brauchen⁷, nur gelegentlich ausbilden.

Die Quantenmechanik im engeren Sinne, die wir hier allein betrachten wollen, befaßt sich nicht mit Vernichtungs- und Erzeugungsprozessen. Sie gibt auch nicht zu der Hypothese nur gelegentlich aufblitzender Teilchen Anlaß. Darum wird die Ähnlichkeit zum Ausgangspunkt der klassischen Mechanik so groß, daß man zweifeln kann, ob noch Spielraum für eine von der klassischen Mechanik wesentlich verschiedene Quantenmechanik bleibt.

Aber die klassische Mechanik folgt keineswegs allein aus der Existenz unverzweigter Weltlinien von Teilchen. Um das einzusehen, muß man sich die Voraussetzungen vergegenwärtigen, die die Aufstellung klassischer Bewegungsgesetze ermöglichen. Sie sind in trefflicher Weise von Planck formuliert⁸. In der klassischen Mechanik wird vorausgesetzt, daß wir den Ort eines Teilchens experimentell als Funktion der Zeit bestimmen können. Dies wäre unmittelbar möglich, wenn wir annehmen dürften, daß wir den Ort der Teilchen in jedem Augenblick feststellen könnten, ohne den Bewegungsablauf zu verändern. Aber selbst bei Makrosystemen verschwindet der störende Einfluß der Beobachtung auf die Bewegung, wie klein er im Einzelfall auch sein mag, niemals vollständig, so daß auch hier der Satz gilt: Die ungestörte Bewegung endet mit jedem Beobachtungsakt.

Doch können wir den Bewegungsablauf aus der Beobachtung von vielen Einzelteilchen erschließen, wenn nur die Bewegung der Teilchen *individuell reproduzierbar* ist, wenn es also eine Gesamtheit von Teilchen gibt, eine *geordnete Gesamtheit*, wie wir sagen wollen, in der jedes genau dieselbe Bewegung ausführt. Denn wenn diese Voraussetzung erfüllt ist, kann man die von der Beobachtung unbeeinflußte Bewegung bestimmen, indem man den Ort eines jeden jeweils zu einer anderen Zeit feststellt und die Gesamtheit der Meßpunkte wie von einem Teilchen herrührend behandelt. Offensichtlich kommt es hierbei nicht einmal auf die Größe der Störung an.

Aber diese Methode setzt voraus, daß es ein *Verfahren* gibt, Bewegungen individuell zu reproduzieren, d. h. viele Teilchen dieselbe Bahn in gleicher

⁷ E. Schrödinger, l. c.².

⁸ M. Planck, l. c.⁶, hier: „Die Physik im Kampf um die Weltanschauung, S. 285 ff., speziell S. 290.

Weise durchlaufen zu lassen, und ein *Kriterium*, die individuelle Reproduzierbarkeit zu erkennen. Das Kriterium lautet einfach: *Ein experimentelles Verfahren reproduziert Bewegungen individuell, wenn vergleichbare Beobachtungen zu vergleichbarer Zeit stets dasselbe Ergebnis liefern.* Natürlich vermag es nur induktive Gewißheit zu geben.

Ob es ein Verfahren gibt, Bewegungen individuell zu reproduzieren, kann mit dem Kriterium geprüft, aber nicht *a priori* entschieden werden. Zweifellos gibt es solche Verfahren innerhalb der erreichbaren Meßgenauigkeit für Makrosysteme. Es zeigt sich dabei, daß man die Störungen durch die Beobachtung im allgemeinen vernachlässigen kann oder wegen ihrer Kleinheit nur in nachträglichen Korrekturen zu berücksichtigen braucht. Darum dürfen wir so handeln, als ob wir die Teilchen ständig beobachten könnten, ohne ihren natürlichen Lauf zu verändern.

Die Materieinterferenzen zeigen demgegenüber, daß man atomare Bewegungen mindestens gegenwärtig nicht individuell reproduzieren kann. Wir beobachten nämlich, auch wenn wir die Versuchsbedingungen so konstant wie möglich halten, über einen weiten Bereich streuende Szintillationen. Solange wir nicht damit rechnen dürfen, konstantere Versuchsbedingungen herzustellen, ist es darum unmöglich, für atomare Teilchen individuelle Bewegungsgleichungen zu finden.

Zu dieser negativen Aussage tritt jedoch noch eine positive. Die Registrierung der Einschläge vieler Teilchen liefert reproduzierbare Interferenzringe. Hieraus folgt: Wenn wir die individuellen Teilchen einer möglichst konstanten Versuchsanordnung gedanklich zu einer Gesamtheit zusammenschließen, so verhält sich diese reproduzierbar, vorausgesetzt, daß die Zahl der beteiligten Individuen hinreichend groß ist. Es gilt also *a posteriori* das Gesetz der großen Zahlen, so daß die Teilchen zwar keine geordnete, aber eine *statistische* Gesamtheit bilden. Nicht die individuelle Bewegung, wohl aber die der Gesamtheit ist reproduzierbar. Wir dürfen darum keine individuellen, sondern nur statistische Bewegungsgesetze erwarten. In der nächsten Ziffer werden wir die statistischen Bewegungsgleichungen formulieren.

Hier ist der Platz für eine Einschaltung, um folgendem möglichen Einwand zu begegnen: Versuchs-

anordnungen werden in der Werkstatt nach einem bestimmten Plan gebaut und im Laboratorium mit geeigneten Instrumenten kontrolliert. Beides geschieht auf Grund klassischer Gesetze. Ohne diese ist es kaum möglich, konstante Versuchsbedingungen zu finden und vielleicht sogar ausgeschlossen, sie auch nur zu definieren⁹. Darum ist das Programm, die Mikromechanik unabhängig von der Makromechanik zu entwickeln, in der Wurzel krank.

Demgegenüber müssen wir folgendes bedenken: Zwar ist es außerordentlich bequem, daß die Konstanz der Versuchsbedingungen bereits makrophysikalisch einigermaßen garantiert werden kann. Aber niemals wird so die letzte Feinheit erreicht. Stets ist es nötig, die Geräte zu justieren, d. h. ihre Konstanz an dem zu erwartenden Effekt zu prüfen, bei mikrophysikalischen Untersuchungen also mikrophysikalisch. Für grundsätzliche Fragen kommt es nur auf diesen letzten Schritt an. Darum besteht kein Grund, an der Möglichkeit einer rein mikrophysikalischen Ableitung der Quantenmechanik zu zweifeln.

Das Ziel, statistische Bewegungsgleichungen zu finden, ist mit dem der statistischen Mechanik vergleichbar. Wir müssen diese Aufgabe etwas genauer formulieren, um auch den Unterschied zu erkennen. Zunächst verweilen wir bei dem Begriff „statistische Gesamtheit“. Er stimmt mit dem der „geordneten Gesamtheit“ darin überein, daß eine Menge unabhängiger Individuen in Gedanken als Einheit betrachtet wird. Das die Gesamtheit gestaltende Prinzip ist in beiden Fällen verschieden; im einen Fall wird gleiches Verhalten sämtlicher Individuen gefordert, im andern Fall die Gültigkeit des Gesetzes der großen Zahlen. Ob wir Gesamtheiten der einen oder andern Art physikalisch realisieren können, hängt von der Natur der Versuchsanordnungen ab. In der klassischen Mechanik sind geordnete Gesamtheiten realisierbar und auch statistische,—in der Quantenmechanik statistische, und zwar, wie sich später herausstellen wird, nur solche. Man könnte sich vorstellen, daß es neben den genannten Gesamtheiten noch andere gibt, die durch neuartige Ordnungsprinzipien definiert sind¹⁰, vielleicht sogar solche ohne Ordnungsprinzip, „chaotische Gesamtheiten“ sozusagen¹¹.

⁹ C. F. v. Weizsäcker, I. c.¹, S. 28.

¹⁰ Boltzmanns Prinzip der vollkommenen Unordnung ist nach dem hier eingeführten Sprachgebrauch ein Ordnungsprinzip, das eng mit dem Gesetz der großen Zahlen verbunden ist.

¹¹ Vielleicht bilden die politischen Entscheidungen eines Landes, das es zum Regierungsgrundsatz erhebt, stets unberechenbar zu handeln, eine chaotische Gesamtheit.

Die durch atomphysikalische Versuchsanordnungen definierten reproduzierbaren Gesamtheiten sind ebenso wie die der mathematischen Statistik und die Gibbschen der statistischen Mechanik statistische Gesamtheiten im oben definierten Sinn. Sie unterscheiden sich von Gibbschen Gesamtheiten nur in dem, was für die statistische Mechanik spezifisch ist. Vor allem sind zwei Unterschiede wichtig:

1. Wir betrachten Gesamtheiten im Raum und nicht in dem hier noch gar nicht definierbaren Phasenraum.
2. Wir suchen Bewegungsgleichungen für die Gesamtheit, ohne solche für Individuen vorauszusetzen und ohne daß solche zu existieren brauchen.

Zum Schluß streifen wir noch die in der letzten Zeit wiederholt aufgegriffene Frage, ob wir hinter den statistischen Bewegungsgleichungen hypothetisch noch individuelle vermuten dürfen. Aus dem Vorstehenden können wir nur entnehmen, daß diese Frage niemals unmittelbar empirisch entschieden werden kann. Denn wenn wir auch heute nicht in der Lage sind, Versuchsanordnungen anzugeben, die Teilchenbahnen individuell zu reproduzieren erlauben, so könnte dies später einmal möglich sein.

Mit den statistischen Bewegungsgleichungen in der Hand werden wir jedoch vor einer neuen Situation stehen. Denn dann ist es eine rein mathematische Aufgabe zu prüfen, ob diese Gleichungen mit der Hypothese individueller Reproduzierbarkeit verträglich sind oder nicht. Wir werden im Einklang mit der gewöhnlichen Auffassung finden, daß sich die statistischen Bewegungsgleichungen und diese Hypothese widersprechen.

3. Statistische Bewegungsgleichungen

Um statistische Bewegungsgleichungen formulieren zu können, denken wir uns den Raum in endlich viele Zellen eingeteilt. Eine davon sei unendlich. Die übrigen sollen hinreichend klein sein und einen einfach zusammenhängenden Bereich bilden. Wenn dieser außerdem genügend groß ist, kann jede beliebige Genauigkeit erreicht werden. Denn dann wird die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen außerhalb zu finden, praktisch gleich 0 sein, so daß dort das Fehlen der Unterteilung keine Rolle spielt. Und aus der Kleinheit der inneren Zellen folgt, daß die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen in einer solchen zu finden, zwischen benachbarten Zellen nicht merk-

lich verschieden ist, so daß eine weitere Unterteilung keinen Gewinn mehr bringt.

Die Form der Zellen spielt keine Rolle. Doch wird es später den Übergang zu einer infinitesimalen Zelleneinteilung und die Einführung kartesischer Koordinaten erleichtern, wenn wir den Raum nach

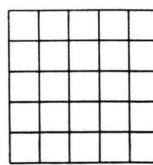


Abb. 1. Ebenes Beispiel für die Zelleneinteilung.

Art von Abb. 1 zerlegen. Ein Basiswürfel der Kantenlänge L wird in kubische Zellen eingeteilt, die ein raumgitterförmiges Netz bilden. Längs jeder Kante mögen K Kuben liegen, so daß wir K^3 Kuben innerhalb der Basis haben. Betrachten wir das Äußere als die eine unendlich große Zelle, so ist die gesamte Zellenzahl $Z = K^3 + 1$, als Volumen der Basis erhalten wir $V_B = L^3$, und die Gitterkonstante berechnet sich aus $a = L/K$. Den Grenzübergang zum unendlich ausgedehnten Kontinuum kann man in zwei Schritten ausführen:

1. $L \rightarrow \infty$, $a = L/K = \text{const}$;
2. $a = L/K \rightarrow 0$.

Sicher wird dieser Grenzübergang in vielen Fällen schon deshalb zweckmäßig sein, weil wir im allgemeinen mit Integralen leichter umgehen können als mit Summen. Soweit haben wir eine Anwendung der Eulerschen Summenformeln vor uns. Ob der zweite Grenzübergang unter allen Umständen physikalisch sinnvoll ist, bleibe dahingestellt. Die Antwort wird davon abhängen, ob wir die Teilchen als punktförmig annehmen dürfen. In der engeren Quantenmechanik ist das sicher der Fall, so daß wir uns hier mit einer abwartenden Haltung begnügen können. Wir wissen aber, daß diese Frage aktuell werden kann, wenn Erzeugungs- und Vernichtungsprozesse ins Spiel kommen.

Wir können die Zellen in verschiedener Weise kennzeichnen. Oft ist es zweckmäßig, sie in beliebiger Weise zu nummerieren. Als allgemeinen Ausdruck für die Zellenummer schreiben wir einen griechischen Index, gewöhnlich λ , μ oder ν , der von 1 bis $Z = K^3 + 1$ laufend zu denken ist. Wenn es auf die Raumstruktur ankommt, mindestens also beim Grenzübergang, betrachten wir statt der Nummern lieber die Ortsvektoren r_μ , die von dem Ursprung eines Koordinatensystems zu den Zellenmittelpunkten weisen. Oft wird es möglich sein, ohne Mißverständnisse befürchten zu müssen, den Index μ wegzulassen und einfach r zu schreiben. In diesem Fall

werden verschiedene Zellen in üblicher Weise durch $\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}''$ usw. unterschieden.

Da wir Erzeugungs- und Vernichtungsprozesse nicht in Betracht ziehen wollen, ist die Teilchenzahl konstant. Darum können wir uns, was hier zunächst geschehen soll, auf die Untersuchung von Einteilchengesamtheiten beschränken. Wir bezeichnen die relativen Häufigkeiten oder die Wahrscheinlichkeiten, mit denen das Teilchen zur Zeit t in den Zellen \mathbf{r}_μ zu finden ist, mit

$$w_\mu(t) = w(\mathbf{r}_\mu, t) \quad (1)$$

und können wegen der statistischen Reproduzierbarkeit annehmen, daß diese Zeitfunktionen experimentell bestimmbar sind. Aus der Definition von Wahrscheinlichkeiten folgt sofort, daß

$$\sum_\mu w_\mu(t) = \sum_{\mathbf{r}} w(\mathbf{r}, t) = 1 \quad (2)$$

sein muß. Oft werden wir diese Wahrscheinlichkeiten nur zwischen bestimmten Zeiten t, t_1, t_2, \dots zu vergleichen haben. In diesem Fall wird es übersichtlicher sein, die Zeit als Index zu schreiben, etwa in der Form $w_\mu, w_\mu', w_\mu'', \dots$

In der klassischen Mechanik liefern die Bewegungsgleichungen ein Gesetz, das den Ortsvektor zur Zeit t aus den Ortsvektoren zu den meist früherliegenden Zeiten t_1 und t_2 zu berechnen erlaubt. Gewöhnlich wählt man dabei wegen der Vorzüge der infinitesimalen Betrachtungsweise die infinitesimal benachbarten Zeitpunkte $t, t_1=t-\epsilon'$ und $t_2=t-\epsilon''$. Aber das ist nicht wesentlich. Daß bereits je drei Vektoren der Weltlinie gesetzmäßig verbunden sind, ist dagegen für die Newtonsche Mechanik charakteristisch. In der Feldmechanik¹² besteht ein solcher Zusammenhang erst zwischen mehr als drei Vektoren. Wenn man z. B. zu den Newtonschen Gleichungen nur die Lorentzsche Strahlungskraft hinzufügt, braucht man bereits vier¹³, weil eine Differentialgleichung dritter Ordnung entsteht.

Analog hierzu wird man, wenn es statistische Bewegungsgleichungen gibt, die Wahrscheinlichkeiten w_μ zur Zeit t aus den Wahrscheinlichkeiten $w_\mu', w_\mu'', \dots, w_\mu^{(n)}$ zu den Zeiten $t', t'', \dots, t^{(n)}$ berechnen können. Wir werden also Gleichungen von der Form

$$w_\mu = f_\mu(w_1', w_2', \dots, w_z^{(n)}) \quad (3)$$

¹² H. Hönl, „Feldmechanik des Elektrons und der Elementarteilchen“, Ergeb. exakt. Naturwiss. **1952**, S. 326 ff.

¹³ Vgl. z. B. R. Becker, „Theorie der Elektrizität“, Bd. II, „Elektronentheorie“, S. 78.

erwarten. Darin sind zunächst die im allgemeinen von t und den übrigen Zeitparametern auch explizit abhängigen Funktionen f_μ und die Anzahl n der zur Berechnung von w_μ notwendigen Verteilungsfunktionen noch unbekannt.

In den vor der Quantenmechanik untersuchten statistischen Gleichungen (z. B. in der Liouville-schen Gleichung, der Diffusionsgleichung, der Boltzmannschen Integrodifferentialgleichung, die sämtlich Differentialgleichungen erster Ordnung in t sind, aber auch in der Biostatistik usw.) findet man stets $n=1$. Daß dies in der Quantenmechanik nicht richtig ist, zeigt das in Abb. 2 dargestellte Experiment.

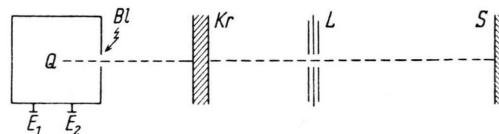


Abb. 2. Beispiel für eine spezielle, stark schematisierte Versuchsanordnung.

Darin stellt Q eine Elektronenquelle dar, deren innerer Aufbau uns hier nicht zu interessieren braucht. E_1 und E_2 sind Einstellknöpfe, die vielleicht noch zusammen mit anderen die inneren Eigenschaften der Quelle reproduzierbar zu ändern erlauben. Auch hier wollen wir nicht näher fragen, was mit der Änderung der Einstellungen in Q vorgeht. Kr sei ein Kristallpulver, wie man es für Debye-Scherrer-Aufnahmen verwendet, L eine Elektronenlinse und S ein Szintillationssschirm, den wir in verschiedenen Abständen von der Blendeneöffnung aufstellen können. Kr und L stehen nur als Beispiele für alle Geräte, die in den Strahlengang gebracht werden. Wir beobachten bei stationärem Betrieb, d. h. bei zeitlich konstanter Elektronenverteilung.

Darin unterscheidet sich das Beispiel von den Vorgängen, die wir mit Gl. (3) beschreiben wollen. Es besteht jedoch eine enge Analogie, wenn wir fragen, wie die Intensitätsverteilungen auf der Schirmebene S in verschiedenen Abständen von der Blendenebene Bl zusammenhängen. Der Schirmabstand tritt dann an die Stelle der Zeit in Gl. (3) und statt der Zelleneinteilung im Raum haben wir eine in der Schirmebene¹⁴.

¹⁴ Ein weiterer Unterschied besteht darin, daß wir hier eigentlich ein Vielelektronenproblem betrachten. Solange wir jedoch die Wechselwirkungen zwischen den Elektronen vernachlässigen können, ist es einer Gesamtheit von Ein-elektronenproblemen äquivalent.

Wenn in der so veränderten Gl. (3) $n=1$ zu setzen wäre, dann müßte die Intensitätsverteilung auf S durch die in der Blendenebene vollständig bestimmt sein. Das Bild auf S müßte also für alle Einstellungen E_1, E_2, \dots dasselbe sein, für die sich die Verteilung auf $S_1 = Bl$ nicht ändert. Das ist aber keineswegs der Fall. Man muß z. B. nur die in Q zu durchlaufenden Spannungen oder auch die Strahlenrichtungen variieren, um das Bild auf S bei gleichbleibender Verteilung auf $S_1 = Bl$ zu ändern¹⁵.

Eine Einengung der Möglichkeiten ergibt sich erst, wenn wir nur solche Einstellungen E_1, E_2, \dots zulassen, die die Verteilung außer auf einem mit Bl zusammenfallenden Schirm S_1 noch auf einer Anzahl weiterer Schirme S_2, S_3, \dots meistens in Stellungen zwischen Bl und S konstant lassen. Wenn die Zahl der konstant zu haltenden Zwischenbilder hinreichend groß ist, kann jede Variabilität aufhören. Wir werden in der nächsten Ziffer zeigen, daß dieser Fall nach endlich vielen Schritten eintreten muß. Somit gilt Gl. (3) mit endlichem n in der für stationäre Bewegungen modifizierten Form.

Analoge Betrachtungen führen auch zu der zeitabhängigen Gl. (3). Nur sind in diesem Fall die Beobachtungen weniger einfach, weil an die Stelle von Verteilungsfunktionen auf Ebenen solche im Raum treten, die man nicht mehr in einem einzigen Beobachtungsakt erfassen kann.

Hiernach ist eine reproduzierbare Gesamtheit im allgemeinen erst durch die Angabe vieler unabhängiger Verteilungsfunktionen eindeutig bestimmt. Das ist eine allgemeinere Form der Statistik, die uns stets dann begegnet, wenn nicht alle Bestimmungsstücke der Gesamtheit zugleich beobachtbar sind. Wären sie zugleich beobachtbar, dann hätten wir ähnlich wie im Falle der Liouvilleschen Gleichung $n=1$ zu setzen und an Stelle der Verteilungsfunktionen im Raum solche in einem höher dimensionalen Phasenraum.

Im übrigen müssen die Gl. (3) wie alle rein statistischen Gleichungen linear sein. Da eine statistische Gesamtheit nur eine gedankliche Zusammenfassung physikalisch unabhängiger Individuen ist, kann der Akt der Zusammenschau deren Bewegung nicht ändern. Daraus folgt, wie wir gleich explizit zeigen wollen, die Superponierbarkeit der Wahrscheinlichkeiten. Diese Behauptung ist, von der

Quantenmechanik und von der Boltzmannschen Integrodifferentialgleichung her gesehen, auf den ersten Blick überraschend. Sie ergibt aber keinen Widerspruch zu den üblichen Feststellungen über die Youngsche Beugung am Doppelspalt, weil die Gesamtheit beim Doppelspaltversuch nur dann eine gedankliche Zusammenfassung derer von zwei Einzelpaltversuchen wäre, wenn die Gesamtheiten bereits durch die Verteilungsfunktionen in der Blendenebene bestimmt wären, was nicht der Fall ist. Auch die Nichtlinearität der Boltzmannschen Gleichung steht nicht im Gegensatz zu unserer Behauptung, weil diese Gleichung nicht von gedachten, sondern von realen Gesamtheiten handelt, deren Individuen in Wechselwirkung stehen.

Zum Beweis unserer Behauptung gehen wir davon aus, daß die Gl. (3) nicht nur für die relativen Häufigkeiten, sondern auch für die absoluten Teilchenzahlen gelten müssen. Betrachten wir zwei Gesamtheiten mit den Teilchenzahlen $N_\mu^{(q)}$ und $\bar{N}_\mu^{(q)}$, die dem gleichen Prozeß unterworfen seien, so haben wir an Stelle von Gl. (3) die beiden folgenden Gleichungssysteme nebeneinander:

$$\begin{aligned} N_\mu &= f_\mu(N_1', \dots, N_z^{(n)}), \\ \bar{N}_\mu &= f_\mu(\bar{N}_1', \dots, \bar{N}_z^{(n)}). \end{aligned} \quad (4)$$

Fassen wir beide Gesamtheiten in Gedanken zu einer dritten zusammen, so muß die Anzahl der Teilchen in jeder Zelle und in jedem Augenblick gleich der Summe der entsprechenden Teilchenzahlen der Teilgesamtheiten sein, da die Zusammenschau kein physikalischer Eingriff ist. Es gelten also die Gleichungen:

$$N_\mu + \bar{N}_\mu = f_\mu[(N_1' + \bar{N}_1'), \dots, (N_z^{(n)} + \bar{N}_z^{(n)})].$$

Kehren wir zu den relativen Häufigkeiten zurück, so folgt hieraus, wenn wir von den Gl. (4) Gebrauch machen und die Gesamtzahl der Individuen in den Teilgesamtheiten mit N und \bar{N} bezeichnen:

$$\begin{aligned} f_\mu(Nw_1' + \bar{N}\bar{w}_1', \dots, Nw_z^{(n)} + \bar{N}\bar{w}_z^{(n)}) \\ = Nf_\mu(w_1', \dots, w_z^{(n)}) + \bar{N}f_\mu(\bar{w}_1', \dots, \bar{w}_z^{(n)}). \end{aligned} \quad (5)$$

Das sind, da N und \bar{N} willkürliche Faktoren darstellen, gerade die mathematischen Bedingungen für die Linearität. Die Funktionszeichen f_μ bedeuten daher von nun an lineare Ausdrücke.

Nach dem Vorbild der klassischen Mechanik könnten wir in Gl. (3) die Zeitpunkte t, t_1, \dots, t_n infinitesimal benachbart wählen. Es ergäbe sich ein System von $Z-1$ linear unabhängigen Differentialgleichungen n -ter Ordnung. Aber die finite Darstel-

¹⁵ In einer solchen Erläuterung sind wohl klassische Begriffe unbedenklich.

lung ist der Art, wie wir Gesamtheiten beobachten, mehr angemessen. Allerdings wird es zweckmäßig sein, die n Zeitpunkte auf der rechten Seite von Gl. (3) nicht willkürlich zu wählen.

Zunächst stellen wir die Bewegungsgleichungen in Transformationsform dar. Dazu bezeichnen wir die Zeitpunkte auf der rechten Seite von Gl. (3) mit $t'_0, t''_0, \dots, t^{(n)}$ und für die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten schreiben wir $\hat{w}'_\mu, \hat{w}''_\mu, \dots, \hat{w}^{(n)}_\mu$. Der Zeitpunkt t auf der linken Seite ist beliebig. Wir betrachten an seiner Stelle ebenfalls n verschiedene Zeitpunkte, etwa $t, t', \dots, t^{(n)}$, und nennen die zugehörigen Verteilungsfunktionen $w'_\mu, w''_\mu, \dots, w^{(n)}_\mu$. Dann liefert Gl. (3) eine Transformation von n Verteilungsfunktionen in n andere, die eine Basis für weitere Transformationen bilden.

Die Wahl der Zeitpunkte eines Basissystems ist noch willkürlich. Hier können durch geeignete Konventionen Vereinfachungen erzielt werden. Wir wollen, wenn es auch nicht das letzte Wort ist, wenigstens die Zeitpunkte innerhalb der Basis infinitesimal zusammenrücken lassen, und zwar $t'_0, \dots, t^{(n)}_0$ in t_0 und $t', \dots, t^{(n)}$ in t . Dann treten an die Stelle der Verteilungsfunktionen $\hat{w}'_\mu^{(\omega)}$ und $w'_\mu^{(\omega)}$ einfach \hat{w}_μ und w_μ und die Zeitableitungen dieser Funktionen bis zur $(n-1)$ -ten Ordnung.

Der Vorteil dieser Darstellung, nur zwei Zeitpunkte betrachten zu müssen, ist ersichtlich. Physisch ist diese Änderung möglich, ohne daß neue Erfahrungen nötig wären. Der Nachteil der Verwendung von Ableitungen besteht darin, daß diese nicht unmittelbar beobachtbar sind. Doch kann man den Vorteil bewahren, ohne den Nachteil in Kauf nehmen zu müssen, wenn man die Bewegung der Gesamtheit mittels geeigneter Meßinstrumente untersucht.

Ein Meßinstrument verändert den natürlichen Ablauf der Bewegung von einem gewissen Zeitpunkt an in reproduzierbarer Weise. Wir sagen, das Instrument werde in diesem Zeitpunkt eingeschaltet, und wir beobachten wiederum Verteilungsfunktionen, nun aber solche, die sich nach Durchlaufen der Meßanordnung ergeben. Hiernach sind Meßanordnungen sozusagen Standard-Bewegungsabläufe. Weil wir mit jedem von ihnen nicht nur eine einzige Wahrscheinlichkeit, sondern eine ganze Verteilungsfunktion¹⁶ beobachten können und weil uns

die Beobachtungen mit den zur Definition der Gesamtheit notwendigen n Verteilungsfunktionen versehen müssen, brauchen wir neben der direkten Bestimmung einer Verteilungsfunktion noch $n-1$ instrumentelle Bestimmungen. Wir müssen darum $n-1$ Meßanordnungen voraussetzen¹⁷.

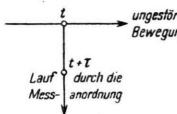


Abb. 3. Schematische Darstellung einer Messung im Zeitpunkt t .

Abb. 3 zeigt schematisch die Wirkungsweise einer Meßanordnung. Die Linien stellen Geschehensabläufe dar. Jeder Punkt bezeichne den Zustand der Gesamtheit in einem bestimmten Augenblick. Die horizontale Gerade stehe für den unbeeinflußten Ablauf der Bewegung der Gesamtheit. Wenn wir zur Zeit t ein Meßinstrument einschalten, so bedeutet dies, daß das Geschehen von diesem Zeitpunkt an anders abläuft, was durch den von t an abwärts laufenden Weg angedeutet sei. Wir beobachten, dem neuen Laufe folgend, die Verteilungsfunktion im Zeitpunkt $t+\tau$. Sie ist im allgemeinen durch solche Eigenschaften der Gesamtheit bestimmt, die im Zeitpunkt t nicht unmittelbar sichtbar sind. Denn die Verteilungsfunktion zur Zeit $t+\tau$ kann auch bei festgehaltener Verteilung in t noch variieren. Sie ist darum genau so wie die späteren Verteilungen des ungestörten Verlaufs zur Charakterisierung der Gesamtheit geeignet.

Nun interessiert uns im allgemeinen nicht unmittelbar die Verteilungsfunktion hinter einem Meßinstrument. Sie ist nur ein Maß für die Eigenschaften der ungestörten Gesamtheit im Zeitpunkt t . Man könnte hieraus die Forderung ableiten, daß man die beobachtete Verteilung gewissermaßen auf den Zeitpunkt t zurückrechnen muß. Wahrscheinlich wäre es sehr schwer zu definieren, was das heißen soll. Glücklicherweise bedürfen wir einer solchen Umrechnung nicht. Denn wir können sagen: Wenn der Ablauf in der Meßanordnung wohldefiniert ist, ist die Verteilung hinter dem Meßinstrument ein wohldefinierter Ausdruck für die Eigenschaften der ungestörten Gesamtheit zur Zeit t . Wir betrachten sie, solange das Meßinstrument nicht selbst zum Objekt der physikalischen Untersuchung wird, nur als solchen und indizieren sie

¹⁶ Quantenmechanisch gesprochen, weil stets eine ganze Anzahl von Größen gleichzeitig beobachtbar ist.

¹⁷ Das ist immer noch eine große Zahl, die sich erst auf 2 reduziert, wenn man nur reine Fälle (s. u.) betrachtet.

daher mit der Zeit t . Wir sagen: Wir haben mit dem Instrument die Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht des Ortes zur Zeit $t + \tau$, sondern die einer durch das Instrument definierten Größe zur Zeit t bestimmt, z. B. die des Impulses. Man beachte, wie hier andere Größen als der Ort durch die Instrumente definiert sind.

Die direkte Beobachtung und die Messung mit den $n - 1$ Meßanordnungen liefern n auf die Zeit t bezogene Verteilungsfunktionen, die wegen ihrer Unabhängigkeit umkehrbar eindeutig und natürlich auch linear mit den Verteilungsfunktionen zu den Basiszeiten $t_0', \dots, t_0^{(n)}$ verbunden sind. Beide eignen sich darum in gleicher Weise zur Kennzeichnung der Gesamtheit. Beide transformieren sich infolge der Bewegung linear. Da die instrumentell gewonnenen Verteilungsfunktionen ähnlich wie oben die Ableitungen nur auf einen Zeitpunkt bezogen sind, ziehen wir sie weiterhin vor. Bezeichnen wir diese Verteilungsfunktionen mit $w_\mu, w_\mu', \dots, w_\mu^{(\varrho)}, \dots, w_\mu^{(n-1)}$, so lauten die Bewegungsgln. (3) schließlich:

$$[w_1(t), \dots, w^{(n-1)}(t)] = \text{Lin. Fkt. } [w_1(t_0), \dots, w^{(n-1)}(t_0)]. \quad (6)$$

Darin bezeichnet jeder Index ϱ eine Meßanordnung und die durch sie definierte physikalische Größe.

Grundsätzlich können wir beliebige Meßanordnungen verwenden, solange sie die Bedingung der Unabhängigkeit erfüllen. Doch ist es bequem und der Quantenmechanik, wie sich zeigen wird, sehr angemessen, wenn wir „komplementäre“ Meßanordnungen verwenden. Sie sind durch die folgenden Eigenschaften definiert. *n Meßanordnungen, unter denen sich die direkte Beobachtung befinden kann, heißen wechselseitig komplementär, falls folgendes gilt: Wenn sich nach einer der Verteilungsfunktionen alle Teilchen der Gesamtheit in einer einzigen Zelle befinden, ergeben sämtliche anderen Verteilungsfunktionen Gleichverteilung.*

Um diese Definition anwenden zu können, müssen wir voraussetzen, daß komplementäre Meßanordnungen existieren und daß obige Definition zu ihrer eindeutigen Kennzeichnung ausreicht. Beide Voraussetzungen werden im folgenden geprüft. Aus Anm. 17 geht hervor, warum man die Komplementarität gewöhnlich nur als Relation zwischen zwei Größen betrachtet.

4. Zahl der statistischen Freiheitsgrade und der Bewegungsparameter

Der Bestimmung dieser Zahlen schicken wir eine allgemeine Bemerkung voraus, um abgrenzen zu

können, wonach hier gefragt wird. Welche Werte wir auch immer für die Zahl der Freiheitsgrade und der Parameter erhalten, stets kann man sich vorstellen, daß durch die spezielle Natur der Bewegungsgleichungen nicht alle Freiheiten ausgenutzt werden. Wenn wie z. B. in Ziff. 7 Bewegungsgleichungen betrachtet werden, in denen sich gewisse Symmetrieeigenschaften von Raum und Zeit widerspiegeln, so handelt es sich bei ihnen sicher um eingeschränkte Systeme. Diese sind hier nicht gemeint.

Wir fragen vielmehr nach den Freiheitsgraden und den Bewegungsparametern, die allein aus der Vorstellung von Partikeln und die Art, wie wir sie beobachten, folgen. Das sind die Anzahlen, die man unter der Voraussetzung der *größten möglichen Variabilität* erhält. Mit andern Worten heißt dies: Nicht die Begrenzung der Zahlen nach unten, sondern nur, daß nach oben eine Schranke existiert, ist von Interesse. Wenn wir unsere Frage so verstehen, führt sie unmittelbar zu statistischen Bewegungsgleichungen, die mit denen der Transformationstheorie der Quantenmechanik verbunden sind.

Die Anzahl n der Verteilungsfunktionen, die zur Definition einer reproduzierbaren Gesamtheit notwendig ist, ergibt sich aus folgender Betrachtung.

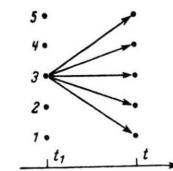


Abb. 4. Zur Abzählung der statistischen Freiheitsgrade.

In Abb. 4 seien die Zellen des Raumes zu den Zeiten t_1 und t für den Sonderfall $Z = 5$ als Punkte dargestellt. Wenn sich zur Zeit t_1 alle Individuen der Gesamtheit in einer bestimmten Zelle, etwa der dritten befinden, so ergibt sich zur Zeit t eine Verteilung, von der wir wissen, daß sie noch beliebig variieren kann. Damit ist die Zahl der statistischen Freiheitsgrade beim Übergang von einem festen Punkt aus gemäß dem Pfeilbündel in Abb. 4 mit Rücksicht auf Gl. (2) gerade $Z - 1$. Da wir Z verschiedene Anfangspunkte haben, gibt es Z ($Z - 1$) verschiedenartige Übergänge. Fügen wir die $Z - 1$ Freiheitsgrade der Verteilungsfunktion zur Zeit t_1 hinzu, so erhalten wir im ganzen $(Z + 1)(Z - 1)$ statistische Freiheitsgrade. *Die Zahl der statistischen Freiheitsgrade ist also*

$$f = (Z + 1)(Z - 1) = Z^2 - 1. \quad (7)$$

Da jede Verteilungsfunktion $Z-1$ unabhängige Komponenten hat, folgt:

$$n = Z + 1. \quad (8)$$

Reproduzierbare Gesamtheiten sind hiernach erst durch $Z+1$ unabhängige Verteilungsfunktionen vollständig bestimmt.

Gegen diese Argumente könnte man einwenden, daß wir nur sehr spezielle Übergänge betrachtet haben und daß darum die wahre Zahl der Freiheitsgrade noch größer sein könnte. Nun ist es wegen der fehlenden individuellen Reproduzierbarkeit im allgemeinen nicht möglich, beliebige Übergangswahrscheinlichkeiten zu beobachten. Aber selbst wenn wir es könnten, kämen wir zu keinem andern Ergebnis. Denn dann hätten wir von den Gleichungen

$$w_\mu = \sum_v U_{\mu v} \dot{w}_v$$

auszugehen, die mit Rücksicht auf die Nebenbedingungen

$$\sum_\mu U_{\mu v} = 1$$

gerade $Z(Z-1)$ linear unabhängige Übergangswahrscheinlichkeiten $U_{\mu v}$ enthalten, was mit der vorangegangenen Abzählung im Einklang ist¹⁸.

Nachdem die Zahlen n und f bestimmt sind, kann man auch die Zahl p der Gleichungsparameter angeben. Wir knüpfen an Gl. (6) an. Danach stellt sich die Bewegung der Gesamtheit als lineare Transformation der Z^2-1 Wahrscheinlichkeiten dar. Wir haben also eine lineare Abbildung des (Z^2-1) -dimensionalen Vektors W der Wahrscheinlichkeiten vor uns:

$$W \rightarrow W' = LW. \quad (9)$$

Die Zahl der Parameter einer beliebigen derartigen Transformation beträgt $(Z^2-1)^2$. Aber ein großer Teil dieser Transformationen bildet den Vektor W auf sich selbst ab, führt also, da L nur im Hinblick auf Gl. (9) Bedeutung hat, zu keiner Bewegung. Er kann daher außer Betracht bleiben. Es genügt, wenn wir unter den Transformationen L eine Schar aussieben, die gerade mit Sicherheit jeden Vektor in jeden überzuführen erlaubt. Da die Vektoren Z^2-1 Komponenten haben, leisten dies geeignete Scharen von Transformationen mit

$$p = Z^2 - 1 = f \quad (10)$$

¹⁸ Hierauf beruht, daß man solche Übergangswahrscheinlichkeiten allgemein definieren kann, wenn man sich mit einer formalen Bestimmung begnügt und negative Wahrscheinlichkeiten zuläßt. Vgl. F. Bopp, Z. Naturforsch. **2a**, 202 [1947], **7a**, 82 [1952]. Hier wollen wir solche formalen Aussagen vermeiden.

Parametern. Die Zahl der Bewegungsparameter p stimmt mit der der statistischen Freiheitsgrade f überein; sie beträgt Z^2-1 .

Die physikalische Bedeutung des letzten Satzes ist leicht zu erkennen. Jeder Parameter liefert einen Bewegungstyp. Jede Bewegung liefert eine bestimmte Transformation der Gesamtheit, die sich in einer Veränderung der f unabhängigen Wahrscheinlichkeiten ausdrückt. Da wir die Bewegung an nichts anderm erkennen können als an diesen Wahrscheinlichkeiten, kann die Zahl der unabhängigen Bewegungen nicht größer sein als f . Sie ist gleich f nach der anfangs geforderten maximalen Variabilität.

Hier ergeben sich zum ersten Male Anklänge an die Quantenmechanik. In ihr wird eine Gesamtheit durch eine hermitesche Matrix mit der Spur 1 dargestellt. Es ist die statistische Matrix¹⁹ P . Nun hat eine hermitesche Matrix P von Z Zeilen und Z Spalten mit der Spur 1 gerade Z^2-1 linear unabhängige Komponenten. Wir können darum die Wahrscheinlichkeiten W zunächst noch auf vielfältige Weise umkehrbar eindeutig und linear den Elementen einer solchen Matrix zuordnen. Da eine beliebige lineare Funktion der Elemente einer Matrix in der Form Spur (AP) geschrieben werden kann, gelten für die Wahrscheinlichkeiten $w_\mu^{(2)}$ die wohlbekannten Gleichungen

$$w_\mu^{(2)} = \text{Spur} (F_\mu^{(2)} P). \quad (11)$$

Darin dürfen wir, weil P hermitesch ist, die die Wahrscheinlichkeiten $w_\mu^{(2)}$ bestimmenden Matrizen $F_\mu^{(2)}$ o.B.D.A. ebenfalls hermitesch annehmen.

Wir können noch einen Schritt weiter gehen. Die quantenmechanischen Bewegungsgleichungen für statistische Matrizen haben die Form²⁰:

$$P' = U^\dagger P U, \quad U^\dagger U = 1. \quad (12)$$

Darin sind P und P' die auf zwei Zeitpunkte bezogenen statistischen Matrizen, und U ist eine unitäre Transformation. Die Ableitung dieser Gleichung aus Gl. (3) wird in den beiden nächsten Ziffern folgen. Hier bemerken wir nur: Obige unitäre Transformation hat Z^2 Parameter; einer ist ein gemeinsamer Phasenfaktor sämtlicher Matrixelemente. Er ist daher mit P vertauschbar und hebt sich aus

¹⁹ J. v. Neumann, „Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik“, Springer 1932, Kap. 4, Ziff. 1. Bei J. v. N. steht U an der Stelle von P (Probability Matrix).

²⁰ J. v. Neumann, I. c.¹⁹, S. 168–170.

Gl. (12) heraus, so daß die Änderung der statistischen Matrix P mit Z^2-1 Elementen durch eine Transformation mit Z^2-1 Parametern beschrieben wird, was mit unsren obigen Abzählungen im Einklang ist.

Es ist wohl zu beachten, daß in die Betrachtungen dieser Ziffer außer in den vorgreifenden Beispielen am Ende keine neuen Erfahrungen eingehen. Erst in den beiden nächsten Ziffern begegnen wir der für die Quantenmechanik entscheidenden Erfahrung, nämlich der der Umkehrbarkeit der statistischen Bewegungsgleichungen.

5. Umkehrbarkeit

Die für die Quantenmechanik wesentliche Voraussetzung tritt besonders anschaulich hervor, wenn wir den Fall $Z=2$ betrachten. In diesem Fall haben wir drei statistische Freiheitsgrade und drei Bewegungsparameter. Von den sechs Wahrscheinlichkeiten $w_{\mu}^{(\varrho)}(\mu=1,2; \varrho=0,1,2)$ der drei Verteilungsfunktionen sind nur drei unabhängig. Um die Schreibweise möglichst symmetrisch zu machen, betrachten wir die drei Wahrscheinlichkeitsspannen

$$w_1 - w_2 = w, \quad w_1' - w_2' = w', \quad w_1'' - w_2'' = w'', \quad (13)$$

die wir als wechselseitig komplementär voraussetzen. Sie variieren im Intervall $(-1, +1)$. Betrachten wir sie als Komponenten eines Vektors $\mathfrak{W} = (w, w', w'')$, der dem in Gl. (9) entspricht, so lauten die statistischen Bewegungsgleichungen

$$\mathfrak{W}(t) = L(t, t_0) \mathfrak{W}(t_0). \quad (14)$$

Darin ist L eine von drei Parametern abhängige Transformationsmatrix, die den Raum der Vektoren \mathfrak{W} auf sich abbildet.

Wir stehen nunmehr vor der Aufgabe, die spezielle Gestalt dieser Transformation zu bestimmen.

Ihre Besonderheiten zeigen sich, wenn wir die Intervallgrenzen von $w^{(\varrho)}$ berücksichtigen. Betrachten wir w, w', w'' als kartesische Koordinaten in einem dreidimensionalen Zustandsraum, so bezeichnen nur die Punkte innerhalb eines achsenparallelen Würfels, dessen Kantenlänge 2 ist und dessen Mittelpunkt mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammenfällt, mögliche Gesamtheiten. Punkte außerhalb des Würfels haben keine Bedeutung.

Eine lineare Abbildung des Zustandsraumes auf sich führt den Würfel in ein Parallelepiped über, das nur in Sonderfällen wieder ein Würfel ist. Betrachten wir die Transformationen zunächst losge-

löst von ihrer physikalischen Bedeutung, so ergeben sich folgende Typen:

1. Das Bild ist ein Würfel, der mit dem ursprünglichen zusammenfällt.
2. Das Bild liegt ganz innerhalb des Würfels.
3. Das Bild umschließt den Würfel.
4. Bild und Würfel überschneiden sich.
5. Bild und Würfel haben keine gemeinsamen Punkte.

Mit Rücksicht darauf, daß nur die Punkte innerhalb des Würfels eine physikalische Bedeutung haben, sind diejenigen Transformationen auszuschließen, bei denen statistisch wohldefinierte in undefinierte Punkte übergehen. Danach scheinen nur die beiden ersten Fälle als physikalisch sinnvoll übrig zu bleiben.

1. Fall: Die Deckoperationen führen die Ecken des Würfels in Ecken über. Diese bezeichnen Gesamtheiten, für die jede Wahrscheinlichkeit 1 oder 0 ist. Entweder sind sämtliche Teilchen der Gesamtheit in der Zelle oder keines. Wir haben einen Zustand höchster Bestimmtheit, also eine geordnete Gesamtheit vor uns. Die Transformationen führen geordnete Gesamtheiten in geordnete über. Es ist der Fall, den wir aus der statistischen Mechanik von der Liouville'schen Gleichung her kennen. Er schließt die Möglichkeit individueller Reproduzierbarkeit ein. Da auch die reziproke Transformation zum ersten Typus gehört, sind die statistischen Bewegungsgleichungen umkehrbar. *Keine Streuung* und *Umkehrbarkeit* sind die charakteristischen Züge dieses Falles.

2. Fall: Die Transformation führt die Eckpunkte des Würfels in andere Punkte über, die auf der Oberfläche des Würfels oder in seinem Innern liegen können. Die Zustände höchster Bestimmtheit gehen also in weniger bestimmte Zustände über. Wir haben einen diffusionsartigen Vorgang. Die reziproke Transformation gehört zum Typus 3; sie stellt also keine mögliche Bewegung dar. Darum sind die statistischen Bewegungsgleichungen nicht umkehrbar. Die charakteristischen Züge des zweiten Falles sind hiernach: *Diffusion der Wahrscheinlichkeiten* und *Nichtumkehrbarkeit*. Das ist der gewöhnliche Fall, den man vor Augen hat, wenn man an Statistik denkt.

Die quantenmechanische Statistik ordnet sich keinem dieser beiden Fälle unter. Sie vereint die Diffusion mit der Umkehrbarkeit, was oft bemerkt, aber in seiner statistischen Bedeutung kaum unter-

sucht ist. Das Auseinanderfließen Schrödingerscher Wellenpakete ist ebenso bekannt wie die Zeitsymmetrie der Schrödinger-Gleichung. Zunächst scheint es, daß damit bewiesen ist: Eine rein korpuskular-statistische Auffassung der Quantenmechanik ist unmöglich. Aber eine Möglichkeit ist noch übersehen. Denn der Auswahl der Typen 1 und 2 liegt noch eine unausgesprochene Voraussetzung zugrunde, die nicht *a priori* richtig sein muß. Diese Voraussetzung können wir so formulieren: Jede denkbare, d. h. jede mit unserer Vorstellung vereinbare Gesamtheit (mathematisch gesprochen, jeder Punkt im Würfel) ist realisierbar.

Wenn wir berücksichtigen, wie die Gesamtheiten durch die sie erzeugenden Versuchsanordnungen definiert sind, muß obige Voraussetzung mindestens problematisch erscheinen. Ist es sicher, so müssen wir fragen, daß unsere Versuchsanordnungen beliebige Gesamtheiten herzustellen erlauben? Nur die Erfahrung kann darüber entscheiden. Wir wollen diese Frage prüfen, indem wir zunächst einmal die Konsequenzen untersuchen, die sich ergeben, wenn wir zwischen denkbaren und realisierbaren Gesamtheiten unterscheiden.

Zwei Eigenschaften folgen sofort aus der Konzeption des Begriffs „realisierbare Gesamtheit“:

1. Realisierbare Gesamtheiten sind auch denkbar.
2. Realisierbare Gesamtheiten gehen stets in realisierbare über.

Geometrisch bedeutet dies: Realisierbare Gesamtheiten liegen im Würfel, und der Bereich der realisierbaren Gesamtheiten muß bei Bewegungen in sich oder in einen Teilbereich übergehen.

Wenn wir die obigen in dem Begriff „realisierbare Gesamtheit“ steckenden Aussagen noch durch die folgenden Voraussetzungen ergänzen:

3. Jede irgendwann realisierbare Gesamtheit ist stets realisierbar; —
4. Die statistischen Bewegungsgleichungen sind umkehrbar; —

so bleibt allein der Fall übrig, daß der Bereich der realisierbaren Gesamtheiten auf sich abgebildet werden muß. Daraus folgt, daß sich die Bewegungen zu einer Gruppe zusammenschließen. Die Einheit ist in jedem Fall darunter. Die Reziproke existiert wegen der vorausgesetzten Umkehrbarkeit. Und eine Folge von Bewegungen führt aus dem Bereich der realisierbaren Gesamtheiten nicht heraus.

Die einzigen Bereiche innerhalb des Würfels, die bei einer linearen Transformation invariant bleiben können, sind durch Ellipsoide begrenzt, deren Mittelpunkte im Ursprung liegen. Die Gruppe von Transformationen, die Ellipsoide invariant läßt, ist dreiparametrig und mit der Drehgruppe isomorph. Denn man kann jede dieser Transformationen folgendermaßen ausführen. Zunächst wird das Ellipsoid durch eine bestimmte affine Transformation in die einbeschriebene Kugel übergeführt. Diese erfährt eine beliebige Drehung, der sich die Rückführung in das Ellipsoid mittels der Reziproken obiger Affintransformation anschließt.

Andere Möglichkeiten gibt es nicht mehr. Da Zentralellipsoide durch sechs Koordinaten gekennzeichnet sind, nämlich durch die drei Eulerschen Winkel, die die Lage der Hauptachsen bestimmen, und durch die Länge der drei Hauptachsen, werden, wenn wir alle Ellipsoide in Betracht ziehen, sämtliche neun Parameter der vollen linearen Gruppe ausgeschöpft, sechs für die affine Transformation und drei für die Drehung.

Nun zeigt die Erfahrung, daß zu *einer* Zeit sämtliche Teilchen in einer Zelle sein können. Das bedeutet, daß die Spannen $w^{(2)} = \pm 1$ erreichbar sein müssen. Darum muß das Ellipsoid sämtliche Seiten des Würfels berühren. Der Bereich der realisierbaren Gesamtheiten ist also durch ein einbeschriebenes Ellipsoid bestimmt. Welches die beiden andern Koordinaten der Berührungsstellen sind, hängt von der Wahl der Basiswahrscheinlichkeiten vor und nach der Transformation ab. Wir haben komplementäre Spannen angenommen, von denen zwei verschwinden, wenn eine ± 1 ist. In diesem Fall ist das Ellipsoid eine Kugel und die Transformationen in Gl. (14) sind Drehungen. Sie bilden bereits von sich aus eine dreiparametrische Gruppe.

Der Bereich der realisierbaren Gesamtheiten umfaßt die Punkte innerhalb und auf der Oberfläche der dem Würfel einbeschriebenen Kugel. Die kom-

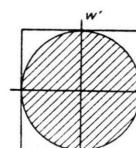


Abb. 5. Realisierbare Gesamtheiten
Fall $Z=2$, Schnitt $w''=0$.

plementären Verteilungen gehören hiernach zu den realisierbaren Gesamtheiten. Die sie bestimmenden und in Ziff. 3 definierten Meßanordnungen existieren also, und sie sind durch die dort gegebene Definition sicher eindeutig bestimmt, weil es neben den

komplementären Verteilungen keine andern gibt, bei denen eine der Wahrscheinlichkeitsspannen W gleich ± 1 sein könnte. Damit ist für den Fall $Z=2$ der am Ende von Ziff. 3 noch geforderte Nachweis der Brauchbarkeit komplementärer Verteilungen erbracht. Abb. 5 zeigt die Verhältnisse an dem ebenen Schnitt $w''=0$.

Damit ist das Bewegungsgesetz wenigstens für den wichtigen Sonderfall $Z=2$ bestimmt. Es ist mit dem der Quantenmechanik äquivalent. Das ist bereits qualitativ zu erkennen. Von der Komplementarität haben wir schon gesprochen. Besonders wichtig ist, daß die Ecken des Würfels keine realisierbaren Gesamtheiten darstellen. Das bedeutet, daß es keine individuelle Reproduzierbarkeit geben kann, nicht etwa „weil ein Teilchen nicht weiß, ob es in einer bestimmten Zelle vorhanden ist oder nicht“, sondern weil es nicht möglich ist, Gesamtheiten herzustellen, deren Teilchen in jedem Augenblick alle in derselben Zelle sind.

Auf viele Zellen übertragen bedeutet dies, daß wir keine Gesamtheiten herstellen können, deren Teilchen sämtlich die gleiche Bahnkurve in derselben Weise durchlaufen. Damit ist es unmöglich, daß es Gesamtheiten gibt, in denen alle Teilchen den gleichen Ort und den gleichen Impuls haben. Dies ist qualitativ der statistische Inhalt der Unschärferelation. Sie auf Einzelteilchen beziehen zu wollen, ist nach unserer Vorstellung unmöglich. Denn für solche gibt es mangels individueller Reproduzierbarkeit keine Gesetze, nicht einmal Unschärferelationen.

Wir haben hier die Ergebnisse für den Fall $Z=2$ auf ein Beispiel angewandt, für das $Z>2$ ist, weil es sachgemäß hierher gehört. Den Beweis, daß dies zulässig ist, werden wir in Ziff. 6 nachtragen. Hier formulieren wir noch einige Ergebnisse für den Fall $Z=2$. Der Ursprung des Koordinatensystems bezeichnet den Zustand völliger Ungewißheit. Die Bestimmtheit nimmt mit wachsender Entfernung vom Ursprung zu. Der Radius ist ein Maß der Bestimmtheit, welches bewegungsinvariant ist. Die Punkte auf der einbeschriebenen Kugel bezeichnen die Zustände der maximal erreichbaren Bestimmtheit. Sie stellen die sogenannten „reinen Fälle“ dar. Superposition zweier Gesamtheiten charakterisiert durch zwei Punkte A, B im Bereich der einbeschriebenen Kugel, ergibt nach Ziff. 3 eine Gesamtheit, die durch einen Punkt C auf der Strecke AB dargestellt wird. Stellen die Punkte A und B reine Fälle dar, liegen sie also auf der Kugeloberfläche,

so entsteht durch Superposition nicht wieder ein reiner Fall, sondern ein Gemenge. Das ist im Hinblick auf den Youngschen Doppelspaltversuch von Interesse. Denn sowohl dieser Versuch, als auch die zugehörigen Einzelpspaltversuche stellen reine Fälle dar. Sie können darum nicht durch Superposition auseinander hervorgehen. Bei gegenteiliger Erwartung gehen wir von einem zu engen Gesamtheitsbegriff aus.

Wir können den Zusammenhang mit der Quantenmechanik quantitativ darstellen, wenn wir aus den Komponenten von \mathfrak{W} eine hermitesche Matrix mit der Spur 1 aufzubauen vermögen, die sich gemäß Gl. (12) unitär transformiert, wenn \mathfrak{W} eine orthogonale Transformation erfährt. Daß dies möglich ist, liegt an der Isomorphie zwischen den Drehungen im dreidimensionalen und den unitären Transformationen im zweidimensionalen Raum. Man rechnet leicht nach, daß der Ansatz

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+w, & w'-iw'' \\ w'+iw'', & 1-w \end{pmatrix} \quad (15)$$

diese Voraussetzung erfüllt, so daß P die Eigenschaften einer quantenmechanischen statistischen Matrix hat. Für P^2 folgt daraus die Gleichung:

$$P^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+w^2+w'^2+w''^2+2w, & 2(w'+iw'') \\ 2(w'+iw''), & 1+w^2+w'^2+w''^2-2w \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Daraus ergibt sich die aus der Quantenmechanik geläufige Definitionsgleichung für reine Fälle¹⁹,

$$P^2 = P, \quad (17)$$

wenn wir gemäß ihrer obigen Definition die Gleichung für die in den Würfel einbeschriebenen Kugel benutzen:

$$w^2 + w'^2 + w''^2 = 1. \quad (18)$$

6. Matrixdarstellung der Bewegungsgleichung

Im Falle $Z>2$ gehen wir von vorneherein zur statistischen Matrix über. Wir müssen aus den Wahrscheinlichkeiten $w_{\mu}^{(2)}$, die wir wieder komplementär voraussetzen, eine hermitesche Matrix P mit der Spur 1 aufbauen. Dafür gibt es viele Möglichkeiten. Wir könnten von jeder ausgehen und kämen zu Gleichungen, die mit denen der Quantenmechanik äquivalent wären. Doch ist es offensichtlich bequem, die hermitesche Matrix P gleich so zu definieren, daß sich die Bewegungsgleichungen von

vornherein in geläufiger Form ergeben. Dem dient die Einführung der folgenden Matrizen. Die Matrizen sind hier ein formales Hilfsmittel, um die statistischen Bewegungsgleichungen einfach darzustellen. Sie haben darum nicht von sich aus eine physikalische Bedeutung, sondern sie entlehnen diese den unmittelbar durch die Messung bestimmten Wahrscheinlichkeiten nach Maßgabe der folgenden willkürlichen Zuordnung.

Wir betrachten idempotente hermitesche Matrizen mit der Spur 1. Sie genügen den Gleichungen²¹

$$F^\dagger = F, \quad F^2 = F, \quad \text{Spur } F = 1. \quad (19)$$

Bis auf einen Eigenwert sind sämtliche gleich 0, der eine ist gleich 1. Der einfachste Vertreter einer solchen Matrix hat die Form:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Da alle diese Matrizen die gleichen Eigenwerte haben, gehen sie durch unitäre Transformation auseinander hervor. Speziell erhält man durch zyklische Permutation:

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad F_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Sie ergänzen sich zur Einheitsmatrix:

$$\sum_{\mu=1}^z F_\mu = 1 \quad (22)$$

und genügen den Multiplikationsregeln

$$F_\mu^2 = F_\mu, \quad F_\mu F_\nu = 0 \quad \text{für } \mu \neq \nu. \quad (23)$$

Durch Z unitäre Transformationen $K^1, \dots, K^{(2)}, \dots, K^{(z)}$ erhält man aus F_μ noch Z weitere Sätze von idempotenten Matrizen

$$F_\mu^{(\varrho)} = K^{(\varrho)\dagger} F_\mu K^{(\varrho)}, \quad (24)$$

für deren Glieder ebenfalls die Gln. (19), (22) und (23) gelten:

$$F_\mu^{(\varrho)\dagger} = F_\mu^{(\varrho)}, \quad F_\mu^{(\varrho)} F_\nu^{(\varrho)} = F_\mu^{(\varrho)} \delta_{\mu\nu},$$

$$\text{Spur } F_\mu^{(\varrho)} = 1, \quad \sum_{\mu=1}^z F_\mu^{(\varrho)} = 1. \quad (25)$$

Die letzten Gleichungen schließen auch die Ausgangsmatrizen ein, wenn wir ϱ von 0 bis Z laufen lassen und $F_\mu^{(0)}$ als synonym mit F_μ betrachten.

²¹ J. v. Neumann, I. c.¹⁹, S. 38 ff., 57 ff.

²² Seien $F_\mu, F_{\mu'}, \dots, F_{\mu^{(\varrho)}}$ ($\varrho < Z$) bereits bekannte Matrizen des geforderten Typus, ebenso $F_1^{(\varrho+1)}, F_2^{(\varrho+1)}, \dots, F_{\nu}^{(\varrho+1)}$ ($\nu < Z-1$), so muß $F = F_{\nu+1}^{(\varrho+1)}$ folgende Gleichungen befriedigen:

$\text{Spur } (F_\mu^{(\lambda)} F) = 1/Z$ für $\lambda \leq \varrho$ nach Gl. (26),

Nun kann man zeigen²², daß man die Transformationen $K^{(\varrho)}$ so wählen kann, daß für die Produkte von $F_\mu^{(\varrho)}$ mit verschiedenen Indizes ϱ noch folgende Gleichungen gelten:

$$\text{Spur } F_\mu^{(\varrho)} F_{\mu'}^{(\varrho')} = \frac{1}{Z} \quad \text{für } \varrho' \neq \varrho. \quad (26)$$

Diese Matrizen sind für die Darstellung von P besonders geeignet, weil sich mit ihnen gebildete Gleichungen leicht auflösen lassen. Definieren wir P durch die Gleichung

$$P = \sum_{\mu', \varrho'} F_{\mu'}^{(\varrho')} \left(w_{\mu'}^{(\varrho')} - \frac{1}{Z} \right) + \frac{1}{Z} = \sum_{\mu', \varrho'} F_{\mu'}^{(\varrho')} w_{\mu'}^{(\varrho')} - 1, \quad (27)$$

so folgt zunächst aus der dritten Gl. (25)

$$\text{Spur } P = 1 + \sum_{\mu', \varrho'} \left(w_{\mu'}^{(\varrho')} - \frac{1}{Z} \right) = 1, \quad (28)$$

da wegen $\sum_{\mu'} w_{\mu'}^{(\varrho')} = 1$ sämtliche Teilsummen $\varrho' = \text{const}$

verschwinden. Außerdem folgt aus den Gln. (25) und (26):

$$\begin{aligned} \text{Spur } F_\mu^{(\varrho)} P &= \left(w_\mu^{(\varrho)} - \frac{1}{Z} \right) \\ &+ \sum_{\mu', \varrho' (\neq \varrho)} \frac{1}{Z} \left(w_{\mu'}^{(\varrho')} - \frac{1}{Z} \right) + \frac{1}{Z}, \end{aligned}$$

d. i. im Einklang mit Gl. (11):

$$w_\mu^{(\varrho)} = \text{Spur } (F_\mu^{(\varrho)} P). \quad (29)$$

Nunmehr können wir sofort die „Deckoperationen“ angeben, die zu statistischen Gleichungen vom Liouvilleschen Typus führen und die hier wie in Ziff. 4 wegen der endlichen Anzahl der Zellen eine diskrete Gruppe bestimmen. Betrachten wir zunächst eine beliebige unitäre Transformation von P , etwa

$$P \rightarrow \bar{P} = U^\dagger P U,$$

so lauten die Wahrscheinlichkeiten nach der Transformation

$$\begin{aligned} \bar{w}_\mu^{(\varrho)} &= \text{Spur } (F_\mu^{(\varrho)} \bar{P}) \\ &= \text{Spur } (F_\mu^{(\varrho)} \cdot \sum_{\mu', \varrho'} U^\dagger F_{\mu'}^{(\varrho')} U \cdot w_{\mu'}^{(\varrho')}) - 1. \end{aligned}$$

Wählen wir darin U so, daß aus jeder F -Matrix wieder eine F -Matrix entsteht, so liefert die Glei-

$$\text{Spur } (F_\mu^{(\varrho+1)} F) = 0 \quad \text{für } \mu \leq \nu \text{ nach Gl. (25).}$$

Das sind $(\varrho+1)(Z-1)+\nu$ Gleichungen. Ihre maximale Zahl ist Z^2-1 , so daß die Zahl der Gleichungen die der Unbekannten niemals übersteigt. Darum gibt es stets Lösungen, und wir können die F sukzessive berechnen.

chung eine Permutation sämtlicher Wahrscheinlichkeiten. Dabei gehen Zustände völliger Bestimmtheit in ebensolche über. Denn wenn die Wahrscheinlichkeiten vor der Transformation nur die Werte 0 und 1 haben, dann auch nachher; und in jedem Satz $w_\mu^{(\varrho)}$, $\varrho = \text{const.}$, kommt nachher wie vorher der Wert 1 genau einmal vor.

Wie im Falle $Z=2$ folgt aus der Umkehrbarkeit der statistischen Bewegungsgleichungen, daß eine Bewegungsgruppe existieren muß, deren Parameterzahl nach unsrern Betrachtungen in Ziff. 4 gerade Z^2-1 ist. Schon in Gl. (12) haben wir als solche Gruppe die der unimodular-unitären Transformationen in P genannt. Sie lauten, wenn wir die Zeitabhängigkeit explizit schreiben:

$$P(t) = U^\dagger(t, t_0) P(t_0) U(t, t_0), \quad U^\dagger U = 1, \quad \det U = 1 \quad (30)$$

und stimmen mit den Gleichungen der Transformationstheorie der Quantenmechanik überein. Die Gleichungen der Quantenmechanik liefern daher eine Lösung unserer statistischen Aufgabe. Damit könnten wir uns zufrieden geben. Denn zum Beweis der Brauchbarkeit der in Ziff. 1 entwickelten Vorstellungen genügt es zu zeigen, daß sich die Gleichungen der Quantenmechanik der rein statistischen Auffassung unterordnen. Das ist hier geschehen.

Die Frage, ob unsere Voraussetzungen noch andere Möglichkeiten für statistische Bewegungsgleichungen zulassen, ist von geringerem Interesse. Doch kann man zeigen, daß die Gleichungen der Quantenmechanik die einzige Lösung liefern. Um das einzusehen, müssen wir unsere Betrachtungen noch in zwei Richtungen ergänzen. Wir lassen uns dabei ein Stück weit von den Untersuchungen in Ziff. 5 leiten.

Führen wir statt der Matrix P eine neue Matrix Q ein, die mit P durch folgende lineare Transformation verbunden sei ($Q^\dagger = Q$, Spur $Q = 1$):

$$Q = (L, P), \quad Q_{\mu\nu} = \sum_{\varrho\sigma} L_{\mu\nu\varrho\sigma} P_{\varrho\sigma}, \quad (31)$$

so induzieren die Transformationen (30) isomorphe Transformationen der Matrix Q . Man kann diese in zweierlei Weisen beschreiben. Entweder behalten wir die Form von Gl. (27) bei. Dann treten an die Stelle der Basismatrizen $F_\mu^{(\varrho)}$ die neuen Matrizen

$$G_\mu^{(\varrho)} = (L, F_\mu^{(\varrho)}). \quad (32)$$

Oder wir behalten die Matrizen F bei. In diesem Fall müssen wir G nach F entwickeln, wodurch an die Stelle der Wahrscheinlichkeiten $w_\mu^{(\varrho)}$ gewisse Linearkombinationen treten, die im allgemeinen nicht mehr komplementär sind. Da die Transformationen L beliebige lineare Kombinationen von $F_\mu^{(\varrho)}$ oder $w_\mu^{(\varrho)}$ ermöglichen, folgt daraus, daß wir von beliebigen Basismatrizen und von irgendwelchen Verteilungsfunktionen ausgehen dürfen. In jedem Fall erhalten wir Gleichungen, die durch geeignete Transformation in die der Quantenmechanik übergeführt werden können. Isomorphe Darstellungen ergeben äquivalente Bewegungsgleichungen.

Da wir nur die Parameterzahlen der Gruppen kennen, wäre es denkbar, daß auch nichtisomorphe Gruppen konkurrieren. Wenn das der Fall wäre, würden aus denselben Voraussetzungen wie oben noch andere Bewegungsgleichungen folgen, die von denen der Quantenmechanik wesentlich verschieden wären. In Einzelfällen gibt es solche Gruppen. Aber sie scheiden aus. Denn nur wenn wir uns auf Gruppen beschränken, die für beliebige Werte von Z existieren, werden die Bewegungsgleichungen nicht von unserer willkürlichen Zelleneinteilung des Raumes abhängen.

Bei den vollständig bekannten einfachen Gruppen²³ kann man folgendermaßen argumentieren. Die linearen Gruppen sind mit den unitären im Kleinen isomorph, liefern also nichts Neues. Im übrigen²⁴ haben die Parameterzahlen Werte von der Form $n(n-1)/2$. Zu beliebigem n gehören die orthogonalen Gruppen und zu geradem n außerdem noch die symplektischen. Nur wenn $n(n-1)/2$ in jedem Fall mit Z^2-1 übereinstimmen könnte, würden die obigen Gruppen konkurrieren. Das ist aber nicht der Fall. Denn die Lösungen der diophantischen Gleichung

$$n(n-1) = 2(Z+1)(Z-1)$$

sind außerordentlich selten. Es gibt also keine einfachen konkurrierenden Gruppen.

Auch die halbeinfachen²⁵ scheiden aus. Nehmen wir an, p_1, \dots, p_r seien die Zahlen der Parameter der einfachen Bestandteile einer halbeinfachen Gruppe und f_1, \dots, f_r seien die zugehörigen sta-

²³ H. Weyl, „Classical Groups“, Princeton 1939.

²⁴ Von den 5 Einzelgruppen, i.e.²³, ganz zu schweigen.

²⁵ F. L. Bauer, Sitzungsber. d. Bay. Akad., math.-phys. Kl., 1952, No. 13. Herrn Dr. Bauer habe ich

für wertvolle Hilfe bei diesen gruppentheoretischen Betrachtungen zu danken.

G. Racah, „Group Theory and Spectroscopy“, The Institute of Advanced Studies, Princeton 1951.

tistischen Freiheitsgrade, so müssen die Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} p_1 + \dots + p_r &= p = Z^2 - 1, \\ f_1 \cdot \dots \cdot f_r &= f = Z^2 - 1. \end{aligned} \quad (33)$$

Wenn wir unter den Werten Z diejenigen herausgreifen, für die $Z-1$ und $Z+1$ Primzahlen sind, so können die Faktoren f_1, \dots, f_r nur die Werte 1, $Z-1$, $Z+1$, Z^2-1 annehmen. Das sind die einzigen Faktoren, durch die Z^2-1 bei beliebigem Z teilbar ist. Wenn wir also für beliebige Z existierende halbeinfache Gruppen suchen, so dürfen sie nur durch die obigen Faktoren gekennzeichnet sein. Nun sind diese Faktoren im Falle halbeinfacher Gruppen nicht mit der Parametergleichung in (33) vereinbar. Faktoren 1 scheiden aus, weil der zugehörige Parameterwert $p=f^2=1$ in halbeinfachen Gruppen nicht vorkommen darf. Wenn der Faktor Z^2-1 vorkommt, muß er daher allein stehen und führt zu den behandelten einfachen Gruppen zurück. Es bleibt also nur die folgende Zerlegung übrig:

$$f_1 = Z-1, \quad f_2 = Z+1.$$

Die zugehörigen Parameterzahlen lauten je nach den zu betrachtenden einfachen Bestandteilen:

$$\begin{aligned} p_1' &= f_1^2 - 1 = Z(Z-2), \quad p_2' = f_2^2 - 1 = Z(Z+2); \\ p_1'' &= \frac{f_1(f_1-1)}{2} = \frac{(Z-1)(Z-2)}{2}, \\ p_2'' &= \frac{f_2(f_2-1)}{2} = \frac{Z(Z+1)}{2}. \end{aligned}$$

Wie wir auch die linken und rechten Parameter kombinieren, niemals erhalten wir die Gleichung $p_1 + p_2 = Z^2 - 1$. Im günstigsten Fall gilt:

$$p_1 + p_2 = p_1'' + p_2'' = Z^2 - Z + 1 < Z^2 - 1, \quad (33a)$$

wenn $Z > 2$ ist. Für $Z = 2$ erhalten wir wegen $p_1'' = 0$ eine einfache Gruppe, und zwar die Drehgruppe aus Ziff. 5. Im übrigen zeigt sich: *Es gibt auch keine halbeinfachen konkurrierenden Gruppen.*

Schwieriger wird die Lage, wenn wir nicht einfache Gruppen betrachten. Denn dann können wir die Differenz in der Bilanzgleichung (33a) durch Anhängung einiger einparametrischer Gruppen dekken. Hier können wir nicht mehr zahlentheoretisch argumentieren. Denn die zuletzt angegebene Zerlegung ist mit beliebigen Werten von Z vereinbar. Aber auch dieser Fall scheidet aus. Um das zeigen zu können, ohne zu weitläufig werden zu müssen, beschränken wir uns auf den Fall $Z = 3$ und unter-

drücken Einzelheiten des Beweises, soweit es möglich ist, um das, worauf es ankommt, anschaulich zu sagen.

Wenn man zunächst von den einparametrischen Anhängseln absieht, kann man die Transformationen der oben definierten Gruppe leicht bestimmen. Die Wahl der Parameter $p = p''$ bedeutet, daß man die Drehungen im $(Z-1)$ -dimensionalen Raum R_{Z-1} mit denen im $(Z+1)$ -dimensionalen Raum R_{Z+1} vereinen muß. Ohne Zusammengehöriges auseinanderzureißen, ist das nur möglich, wenn die Drehungen im R_{Z-1} die Verteilungsfunktionen in sich transformieren und die im R_{Z+1} auf den Index q wirken.

Im Falle $Z = 3$ läßt sich jede Verteilungsfunktion w_μ als komplexe Zahl darstellen. Sei $\varepsilon = \exp(2\pi i/3)$, so liefert

$$\zeta = \xi + i\eta = w_1 + \varepsilon w_2 + \varepsilon^2 w_3$$

einen möglichen Ansatz. Der Definitionsbereich von ζ ist durch das gleichseitige Dreieck in Abb. 6 mit dem Umkreisradius 1 gegeben. Wegen der noch

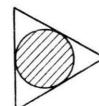


Abb. 6. Definitionsbereich von ζ .

möglichen Drehungen dieser Ebene bestimmt der Innenkreis des Dreiecks mit dem Radius $1/2$ die realisierbaren Fälle. Jede Koordinate ξ und η kann hier nach nur im Intervall $(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ variieren.

Die vier Wahrscheinlichkeitsverteilungen $w_\mu^{(q)}$ bestimmen also vier komplexe Zahlen ζ_q bzw. zwei Punkte mit den Koordinaten ξ_q und η_q in einem vierdimensionalen Raum. Die Gesamtheit wird also durch ein Punktpaar dargestellt. Der Definitionsbereich dieser Punkte ist ein achsenparalleler, im Ursprung zentrierter vierdimensionaler Würfel mit der Kantenlänge 1. Da die Drehungen in diesem vierdimensionalen Raum $R_{Z+1} \equiv R_4$ mögliche Transformationen sind, können realisierbare Gesamtheiten nur durch Punktpaare innerhalb der einbeschriebenen Kugel mit dem Radius $1/2$ dargestellt werden. Bei diesen Transformationen bewegt sich das Dreieck aus Punktpaar und Kugelpunktmittelpunkt wie ein starrer Körper.

Auch die Drehungen im $R_{Z-1} \equiv R_2$ können wir in demselben Bilde darstellen. Sie haben die starre Verbindung auf. Dabei entsteht aus einem Punktpaar eine ganze Schar von Paaren, die sich zu einer doppelt belegten Ellipse zusammenschließen. Realisierbar können nur solche Gesamtheiten sein, bei

denen die ganze Ellipse innerhalb der einbeschriebenen Hypersphäre liegt.

Damit ist die halbeinfache Gruppe $^{Z+1}O \times ^{Z-1}O \equiv ^4O \times ^2O$ geometrisch dargestellt. Wir müßten noch eine $(Z-2)$ -parametrische Abelsche Gruppe anhängen, hier also eine einparametrische, um Z^2-1 Parameter zu erhalten. Dabei kommen nur Deformationen der Ellipse in Betracht. Denn die Drehungen und die Bewegungen innerhalb der Ellipse sind bereits berücksichtigt. Solche Deformationen existieren. Die flächentreuen Affintransformationen der Ellipse in Hauptachsenrichtung liefern ein Beispiel. Doch ist bei ihnen wie bei beliebigen affinen Deformationen die Größe der Verschiebung der Punkte nicht wie bei den Drehungen beschränkt. Darum tritt immer wieder der Fall ein, daß die Punkte aus dem Bereich der realisierbaren Gesamtheiten heraustreten. Deformationen sind also physikalisch ausgeschlossen. *Die gesuchte Abelsche Gruppe existiert nicht.* Die quantenmechanischen Gleichungen liefern das einzige Beispiel mit Z^2-1 statistischen Freiheitsgraden und Z^2-1 Bewegungsparametern.

Es bleibt nur noch übrig zu zeigen, daß auch im Falle $Z > 2$ die Annahme der Umkehrbarkeit zur Unterscheidung zwischen denkbaren und realisierbaren Gesamtheiten zwingt. Die Einschränkung der Realisierbarkeit äußert sich in einer speziellen Eigenschaft der statistischen Matrix, nämlich darin, daß P positiv definit sein muß.

Berechnen wir aus Gl. (30) die direkte Ortswahrscheinlichkeit in der Zelle μ zur Zeit t , so ergibt sich:

$$w_\mu(t) = \text{Spur } F_\mu P(t) = \text{Spur } UF_\mu U^\dagger \cdot P(t_0).$$

Darin haben die Elemente der Matrix UFU^\dagger die Form:

$$\sum_{\varrho' \sigma'} U_{\varrho\varrho'} \delta_{\mu\varrho'} \delta_{\mu\sigma'} U^*_{\sigma\sigma'} = U_{\varrho\mu} U^*_{\sigma\mu}.$$

Setzen wir zur Abkürzung $U_{\varrho\mu} = u_\varrho$, und schreiben wir u_ϱ vektorartig als einspaltige Matrix u , so erhalten wir aus obiger Gleichung für $w_\mu(t)$ folgende hermitesche Form:

$$w_\mu(t) = u^\dagger P u.$$

Da die Wahrscheinlichkeit w_μ nach ihrer physikalischen Bedeutung nicht negativ sein kann und da u ein beliebiger Vektor ist, darf die hermitesche Form keine negativen Werte annehmen, woraus sofort folgt: *Die statistische Matrix ist definit; sie hat keine negativen Eigenwerte.* Da außerdem Spur $P=1$ ist, liegen die Eigenwerte von P im Intervall $(0,1)$, und ihre Summe ist gleich 1.

Hieraus folgt wie im Fall $Z=2$ die Unschärferelation. Wir betrachten nur folgenden Grenzfall: *Wenn bei der direkten Ortsbeobachtung alle Teilchen in einer einzigen Zelle sind, so ergibt sich für sämtliche komplementären Verteilungsfunktionen Gleichverteilung.* Man beachte, daß wir bei der Definition komplementärer Meßanordnungen nur vorausgesetzt haben, daß es Anordnungen mit obiger Eigenschaft gibt. Erst jetzt folgt, daß es, wenn der Vordersatz gilt, keine andern gibt.

Zum Beweis knüpfen wir an Gl. (27) an. Wenn bei direkter Beobachtung alle Teilchen in der Zelle $\mu=1$ sind, stimmt P mindestens in den Diagonalelementen mit Gl. (20) überein. Wären die komplementären Verteilungen ungleich, so hätte die Matrix nichtverschwindende Elemente außerhalb der Diagonale, sie hätte also folgende Form:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & P_{12} & P_{13} & \dots \\ P_{21} & 0 & P_{23} & \dots \\ P_{31} & P_{32} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Wenn eines der nichtdiagonalen Elemente in der ersten Zeile von 0 verschieden wäre, z. B. P_{12} , dann genügte es, den speziellen Vektor $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \end{pmatrix}$ zu betrachten, um zu zeigen, daß die hermitesche Form

$$\lambda = u^\dagger P u = u_1^* u_1 + u_1^* P_{12} u_2 + u_2^* P_{21} u_1$$

nicht definit ist. Denn sie hat die Extremwerte

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + |P_{12}|^2} \geq 0.$$

Ähnliches gilt, wenn für $\mu=1$ sämtliche $P_{1\mu}=0$ sind und wenn nur ein Element außerhalb der ersten Zeile und Spalte, z. B. P_{23} , ungleich 0 ist. In diesem Fall lauten Vektor, quadratische Form und Extremwerte:

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \lambda = u^\dagger P u = u_2^* P_{23} u_3 + u_3^* P_{32} u_2, \\ \lambda = \pm |P_{23}| \geq 0.$$

Somit ist in jedem Fall die der Unschärferelation widersprechende Matrix indefinit.

7. Die Schrödinger-Gleichung

Mit Gl. (30) ist der induktive Aufbau der Quantenmechanik abgeschlossen. Was jetzt zu folgen hätte, die deduktive Entfaltung der Theorie, ist weitgehend in den Lehrbüchern abgehandelt. Nur die Notwendigkeit, Begriffe wie Impuls, Energie, Kraft usw. in einer nicht auf das Korrespondenzprinzip sich stützenden Theorie neu definieren zu

müssen, geht über den gewohnten Rahmen etwas hinaus. Wie in der klassischen Mechanik verdanken sie ihre Bedeutung den Erhaltungssätzen und mit diesen den Symmetrieeigenschaften von Raum und Zeit. Damit gehören sie, das Wort sehr weit gefaßt, nicht zu dem Gedankenkreis der Quantenmechanik, sondern zu dem der Relativitätstheorie. Wir begnügen uns hier damit, die Nahtstelle zwischen beiden an dem Beispiel der sogenannten „nicht-relativistischen“, besser gesagt, der „Galilei-invarianten“ Schrödinger-Gleichung aufzuzeigen.

Der erste Schritt besteht in der Spezialisierung von Gl. (30) auf „reine Fälle“. Sie ergibt sich, wenn wir die statistische Matrix durch ihre Eigenwerte p_ϱ und die zugehörigen Eigenfunktionen darstellen:

$$P_{\mu\nu} = \sum_{\varrho=1}^z p_\varrho \psi_\mu^{(\varrho)} \psi_\nu^{(\varrho)*}. \quad (34)$$

Die reinen Fälle bezeichnen die maximal realisierbare Ordnung. Sie liegen auf dem Wege zu den Fällen höchster Bestimmtheit, die nicht realisierbar sind, weil die statistische Matrix vorher aufhört, definit zu sein. Die maximale Ordnung wird also erreicht, wenn möglichst viele Eigenwerte von P an der Grenze der Definitheit liegen, d. h. wenn alle Eigenwerte außer einem verschwinden. Dieser ist notwendig gleich 1. Für reine Fälle folgt daher aus Gl. (34)

$$P_{\mu\nu} = \psi_\mu \psi_\nu*. \quad (35)$$

Es gilt:

$$P^2 = P. \quad (35a)$$

Für reine Fälle ist es notwendig und hinreichend, daß die statistische Matrix idempotent ist.

Setzen wir Gl. (35) in (30) ein, so folgt:

$$\psi_\mu(t) \psi_\nu^*(t) = \sum_{\alpha, \beta} U_{\mu\alpha} \psi_\alpha(t_0) \psi_\beta^*(t_0) U_{\nu\beta}.$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn

$$\psi(t) = U \psi(t_0) \quad (36)$$

ist. Umgekehrt folgt auch Gl. (36) aus der vorhergehenden bis auf einen räumlich konstanten, im allgemeinen aber zeitabhängigen Phasenfaktor. Gl. (36) bildet die Basis der Transformationstheorie; ψ ist die *Wahrscheinlichkeitsamplitude* oder die *Wellenfunktion*. Als Wahrscheinlichkeitsamplitude begegnet uns ψ in der aus (29) folgenden Gleichung:

$$w_\mu^{(\varrho)} = \psi^* F_\mu^{(\varrho)} \psi. \quad (37)$$

Darin bezeichnen die Matrizen $F_\mu^{(\varrho)}$ die unmittelbar beobachtbaren Größen, die unmittelbar zugänglichen „*Observablen*“. Andere Größen wie Impuls usw. sind daraus abzuleiten.

Daß ψ eine Wellenfunktion ist, ergibt sich, wenn wir von Gl. (36) zur infinitesimalen Transformation übergehen. Aus ihrer Zeitableitung

$$\dot{\psi}(t) = \dot{U} \psi(t_0)$$

folgt, wenn wir $\psi(t_0)$ mittels der Reziproken von Gl. (36) eliminieren:

$$i \dot{\psi}(t) = H \psi(t). \quad (38)$$

Darin ist

$$H = i \dot{U} U^\dagger = H^\dagger \quad (38a)$$

eine hermitesche Matrix. Es ist der Hamilton-Operator unseres Problems. In Komponenten aufgelöst, lautet Gl. (38):

$$i \dot{\psi}_\mu = \sum_{\nu=1}^z H_{\mu\nu} \psi_\nu. \quad (38b)$$

Wir erhalten hiernach ein Gleichungssystem, dessen Lösungen wegen der Hermitezität von H Oszillationscharakter haben, so daß wir im Sinne unserer Definition in Ziff. 1 vor einer Wellengleichung stehen, der *Schrödingerschen Wellengleichung*, in der ψ die Schrödingersche Wellenfunktion ist.

Die Bedeutung des reinen Falles beruht auf folgendem Umstand. Die Bestimmung einer beliebigen statistischen Matrix setzt die Beobachtung von $Z+1$ Verteilungsfunktionen voraus. Darin ist Z die Zahl der Zellen im Raum. Eine solche Beobachtung ist niemals vollständig durchführbar. Die Aufgabe vereinfacht sich jedoch beträchtlich, wenn wir wissen, daß ein reiner Fall vorliegt. Denn nach Gl. (32) genügen zwei Verteilungsfunktionen zur Bestimmung von ψ . Solange man also nur reine Fälle vor Augen hat, braucht man neben der direkten Ortsverteilung nur eine einzige komplementäre.

Es fragt sich allerdings, wie wir, ohne die übrigen Verteilungsfunktionen anzuschauen, feststellen können, ob ein reiner Fall vorliegt. Hier hilft die Wellengleichung (38b) weiter. Reine Fälle sind an Interferenzerscheinungen zu erkennen, insbesondere an der Möglichkeit vollständiger Auslöschung. Denn mit abnehmendem Ordnungszustand geht die Schärfe der Interferenzen zurück, um im Grenzfall maximaler Unordnung, charakterisiert durch die statistische Matrix $P=1$, vollends zu verschwinden. Auf den Beweis dieser aus der Beobachtung von Wellen sehr bekannten Erscheinung wollen wir hier nicht eingehen.

Wenn wir in Gl. (38b) statt der Indizes die Ortsvektoren der Zellen benutzen, die wir in Ziff. 2 eingeführt haben, erhalten wir die Gl. (38c):

$$i \dot{\psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{r}'} H(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \psi(\mathbf{r}', t), \quad (38c)$$

woraus im Limes verschwindender Zellengröße die Integralgleichung

$$i \dot{\psi}(\mathbf{r}, t) = \int H(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \psi(\mathbf{r}', t) dV' \quad (39)$$

folgt. Auch der Integralkern muß die Bedingung der Hermitezität

$$H(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t) = H^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \quad (39a)$$

erfüllen. Das nächste Ziel ist die Bestimmung dieses Integralkerns.

Im Falle kräftefreier Teilchen kann man ihn aus den Symmetrieeigenschaften von Raum und Zeit ableiten. Wir stützen uns dabei auf die Untersuchungen der Wignerschen Schule²⁶. Danach bestimmt sich H aus der Idee, daß zu jeder Lösung ψ der Integralgleichung (39) auf Grund der Homogenität und der Isotropie von Raum und Zeit weitere Lösungen gehören, die die Mannigfaltigkeit der damit verträglichen Integralkerne beträchtlich einengen.

Sei $\delta \mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$, $\delta t = t - t'$ eine infinitesimale Transformation, die die Punkte von Raum und Zeit in gleichwertige überführt, so müssen alle physikalischen Größen $\psi' F \psi$ nach Einführung der transformierten Amplituden wieder mit Gl. (39) verträglich sein. Das ist der Fall, wenn mit $\psi(\mathbf{r}, t)$ auch $e^{i\chi(\mathbf{r}, t)} \psi(\mathbf{r} + \mathbf{r}', t + \tau)$ eine Lösung der Integralgleichung ist. Darin ist $\chi(\mathbf{r}, t)$ eine zunächst noch unbekannte infinitesimale Phase. Bis zu Gliedern erster Ordnung entwickelt, folgt hieraus: Mit ψ muß auch

$$\psi + (\mathbf{r}, \nabla) \psi + \tau \dot{\psi} + i \chi \psi \quad (39b)$$

Gl. (38) befriedigen. Setzen wir diesen Ausdruck ein, so ergibt sich, wenn wir gleich die nichtvarierte Gleichung abziehen:

$$\begin{aligned} & i(\mathbf{r}, \nabla) \psi + i \tau \dot{\psi} - \dot{\chi} \psi \\ & + i(\mathbf{r}, \nabla) \dot{\psi} + i \tau \ddot{\psi} - \chi \ddot{\psi} \\ & = \int H(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) [(\mathbf{r}', \nabla') \psi' + \tau' \dot{\psi}' + i \chi' \psi'] dV'. \end{aligned}$$

Hierin bedeutet ein Strich am Funktionszeichen dieselbe Funktion wie ohne Strich mit dem Argument \mathbf{r}' an Stelle von \mathbf{r} .

Setzen wir für die Zeitableitungen die aus Gl. (38) folgenden Integrale ein und führen wir im ersten Term auf der rechten Seite eine partielle Integration durch, so erhalten wir aus der letzten Gleichung

²⁶ E. Wigner: In önnü, nach persönlicher Mitteilung.

$$\begin{aligned} i(\dot{\mathbf{r}} \nabla) \psi - \dot{\chi} \psi &= - \int \left(\mathbf{r} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{r}' \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}'} + \tau \frac{\partial H}{\partial t} \right) \psi' dV' \\ & - \int \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \mathbf{r}'} + \dot{\tau} \right) H + i(\chi H - H \chi') \right] \psi' dV' \\ & + \int (\tau - \tau'') H(\mathbf{r}, \mathbf{r}'', t) H(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', t) \psi' dV'' dV'. \end{aligned}$$

Da Gl. (39) bezüglich t eine Differentialgleichung erster Ordnung ist, kann ψ in einem Zeitpunkt willkürlich gewählt werden, so daß obige Gleichung identisch in ψ gelten muß. Darum ist diese Gleichung auch richtig, wenn wir ψ weglassen. Dabei erhalten wir eine Bestimmungsgleichung für H und χ :

$$\begin{aligned} i(\dot{\mathbf{r}} \nabla) \delta - \dot{\chi} \delta &= - \left(\mathbf{r} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{r}' \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}'} + \tau \frac{\partial H}{\partial t} \right) \\ & - \left(\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \mathbf{r}'} + \dot{\tau} \right) H \end{aligned} \quad (40)$$

$$- i(\chi H - H \chi') + \int (\tau - \tau'') H(\mathbf{r}, \mathbf{r}'', t) H(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', t) dV.$$

Darin steht δ für die Diracsche δ -Funktion $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Für \mathbf{r} und τ haben wir die verschiedenen Symmetrietransformationen von Raum und Zeit einzusetzen, nämlich

1. wegen der Zeithomogenität die Zeittranslation:

$$\mathbf{r} = 0, \quad \tau = \text{const}; \quad (41)$$

2. wegen der Homogenität des Raumes die räumlichen Translationen:

$$\mathbf{r} = \mathbf{const}, \quad \tau = 0; \quad (41a)$$

3. wegen der Isotropie des Raumes die Rotationen:

$$\mathbf{r} = \mathbf{u} \times \mathbf{r}, \quad \tau = 0, \quad \mathbf{u} = \text{const}; \quad (41b)$$

4. wegen der Galileischen Relativität die Galilei-Transformationen:

$$\mathbf{r} = \mathbf{v} t, \quad \tau = 0, \quad \mathbf{v} = \text{const}. \quad (41c)$$

Die Einsteinsche Relativität, die durch die Lorentz-Transformationen gekennzeichnet ist, möge hier außer Betracht bleiben.

Für die zeitlichen und räumlichen Translationen (41) und (41a) lautet Gl. (40) bzw.

$$\begin{aligned} -\dot{\chi} \delta &= -\tau \frac{\partial H}{\partial t} - i(\chi_0 - \chi_0') H; \\ -\dot{\chi} \delta &= -\left(\mathbf{r}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}'} \right) - i(\chi - \chi') H. \end{aligned} \quad (42)$$

In allen diesen Fällen ist der Ansatz $\chi = 0$ möglich und führt zu den Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}'} = 0 \quad (42a)$$

mit den Lösungen:

$$H = H(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (42b)$$

Andere Ansätze als $\chi=0$ brauchen wir nicht besonders zu behandeln, weil sie durch eine Art Eichtransformation auf Gl. (42a) zurückgeführt werden können, d. h. durch eine Transformation von der Form

$$\psi \rightarrow \psi \cdot e^{iu}, \quad H \rightarrow H e^{i(u-u')}. \quad (43)$$

Im weiteren habe H stets die Form wie in Gl. (42b). Der Operator hänge nicht von der Zeit t und nur von dem Relativvektor $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ ab. Danach lautet Gl. (40) mit den Rotationen (41b):

$$-\dot{\chi} \delta = -u \left((\mathbf{r}-\mathbf{r}') \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \right) - i(\chi-\chi') H, \quad (44)$$

d. i. wenn wir wiederum $\chi=0$ setzen und berücksichtigen, daß u ein beliebiger Vektor ist:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad H = H(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|); \quad (44a)$$

H hängt also nur von dem Abstand der beiden Punkte \mathbf{r} und \mathbf{r}' ab, so daß sich ein translations- und rotationsinvarianter Operator ergibt. Eichtransformationen sind nur noch in sehr beschränktem Umfang möglich, weil sie im allgemeinen die Form von H in Gl. (44a) zerstören.

Soweit sind die Ergebnisse selbstverständlich. Eher überrascht, daß sie wegen der noch möglichen Eichtransformationen nur bedingt gelten. Setzen wir nunmehr in Gl. (40) die Galilei-Transformation (41c) ein, so erhalten wir

$$i(\mathbf{v} \nabla) \delta - \dot{\chi} \delta = -i(\chi-\chi') H(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|). \quad (45)$$

Hier ist der Ansatz $\chi=0$ nicht mehr möglich. Vertauschen wir \mathbf{r} und \mathbf{r}' und addieren wir die so entstehende Gleichung zu (45), so folgt:

$$(\dot{\chi} + \dot{\chi}') \delta (\mathbf{r}-\mathbf{r}') = 0, \quad \text{d. h. } \dot{\chi} = 0.$$

Somit ist χ zeitunabhängig, und Gl. (45) nimmt die Form an:

$$(\mathbf{v} \nabla) \delta = -(\chi-\chi') H(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|). \quad (45a)$$

Der Operator $\nabla + \nabla'$ macht daraus:

$(\nabla \chi - \nabla' \chi') H = 0, \quad \nabla \chi = a = \text{const}, \quad \chi = a \mathbf{r} + a_0$, so daß wir von Gl. (45a) zu der integrierbaren Gleichung

$$(\mathbf{v} \nabla) \delta = -(\mathbf{a}, \mathbf{r}-\mathbf{r}') H(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \quad (45b)$$

gelangen. Die Lösungen erhält man aus der Identität

$$\nabla \delta (\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\frac{1}{2} (\mathbf{r}-\mathbf{r}') \Delta \delta (\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \quad (46)$$

die aus der Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta ((\mathbf{a}, \mathbf{r}-\mathbf{r}') \delta (\mathbf{r}-\mathbf{r}')) &= (\mathbf{a}, \mathbf{r}-\mathbf{r}') \Delta \delta (\mathbf{r}-\mathbf{r}') \\ &+ 2(\mathbf{a} \nabla) \delta (\mathbf{r}-\mathbf{r}') = 0 \end{aligned}$$

folgt. Sie lautet (mit $a=w/2\alpha$):

$$H = \alpha \Delta \delta (\mathbf{r}-\mathbf{r}') + \beta \delta (\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \quad (47)$$

Darin ist der erste Term eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung und der zweite die allgemeine der homogenen Gleichung. Den letzten Term kann man mittels der Eichtransformation $\psi \rightarrow \psi \cdot e^{-i\beta t}$ beseitigen, so daß nur eine unbestimmte Konstante übrig bleibt. Mit dem Ansatz $\alpha = -\hbar/2m$ ergibt sich die Schrödinger-Gleichung für das kräftefreie Teilchen in der gewöhnlichen Form:

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi. \quad (48)$$

Darin kann man weder die Konstante, noch ihre Aufspaltung in zwei Teile aus den Symmetrieeigenschaften von Raum und Zeit ableiten. Im übrigen ist jedoch diese spezielle Schrödinger-Gleichung eindeutig bestimmt.

Den Übergang zur Schrödinger-Gleichung im elektromagnetischen Kraftfeld erhält man durch Auflockerung der Symmetrie. Die Eichtransformation

$$\psi \rightarrow \psi e^{iS/\hbar} \quad (49)$$

führt Gl. (48) in die Gleichung

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \dot{S} \psi + \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \text{grad } S \right)^2 \psi \quad (50)$$

über, die der Form nach bereits mit der Schrödinger-Gleichung im Kraftfeld übereinstimmt. Wir gelangen vollends zur allgemeinen Schrödinger-Gleichung, wenn wir die Symmetrie durch die Forderung einschränken, daß sich die Zusatzglieder in Gl. (50) durch Eichtransformation nur lokal transformieren lassen. In diesem Fall treten an die Stelle der Ableitungen von S beliebige Funktionen, von denen wir, um mit der üblichen Definition des elektromagnetischen Feldes im Einklang zu bleiben, den Ladungsfaktor e abspalten. Es ergibt sich hierauf:

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -e \Phi \psi + \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + e \mathbf{A} \right)^2 \psi. \quad (51)$$

Das Prinzip der Auflockerung der Symmetrie mittels Eichtransformation soll hier nicht begründet werden. Wenn über seine Bedeutung schon das letzte Wort gesprochen ist, so muß man es in der projektiven Relativitätstheorie suchen²⁷. In jedem

²⁷ Z. B. P. Jordan, „Schwerkraft und Weltall“, Vieweg 1952, Kap. III, S. 107 ff.

Fall kann man den Hamilton-Operator aus starren oder nach Art der allgemeinen Relativitätstheorie aufgelockerten geometrischen Bedingungen ableiten. Er ist durch sie in dem hier betrachteten Fall bis auf konstante Faktoren eindeutig bestimmt. Zu den Konstanten gibt es weder von den statistischen, noch von den geometrischen Bedingungen her einen Zugang.

Damit sind wir am Ziel. Die Schrödinger-Gleichung ist auf Grund statistischer Prinzipien aus der Partikelvorstellung abgeleitet. Vergegenwärtigen wir uns diese noch einmal im Zusammenhang:

1. Es gibt Teilchen. Sie begegnen uns als mögliche Ursachen lokaler Geschehensakte.
2. Die Teilchen haben in jedem Augenblick einen bestimmten Ort. Aber ihre Bewegung ist nicht individuell reproduzierbar. Es gibt keine geordneten Gesamtheiten und damit keine klassischen Bewegungsgesetze.

3. Es gibt statistische Gesamtheiten von Teilchen. Die Bewegungen der Teilchen solcher Gesamtheiten folgen dem Gesetz der großen Zahlen. Darum ist die Bewegung der Gesamtheit reproduzierbar. Es gibt statistische Bewegungsgleichungen. Sie sind linear.

4. Unter der Voraussetzung maximaler Variabilität folgt die Zahl der statistischen Freiheitsgrade und auch die der Bewegungsparameter. Beide sind gleich $Z^2 - 1$.
5. Die Bewegungsgleichungen sind umkehrbar. Das ist die für die Quantenmechanik entscheidende Bedingung. Sie zwingt zu der Unterscheidung zwischen denkbaren und realisierbaren Gesamtheiten und führt dazu, daß es keine Gesamtheit gibt, in der alle Teilchen dieselbe Bewegung ausführen; d. i. die statistische Form der Unschärferelation.

Der absolute Wert des Resonanzintegrals von Gold

Von DRAGOSLAV POPOVIĆ*

Joint Establishment for Nuclear Energy Research, Kjeller, Norwegen

(Z. Naturforsch. **9a**, 600—602 [1954]; eingegangen am 24. April 1954)

Durch Vergleich des „Cadmium-Verhältnisses“ für die Aktivierung von Gold mit dem für die Absorption durch Bor ergibt sich das Resonanzintegral von Gold zu

$$R = \int_{0.5 \text{ eV}}^{\infty} \sigma_a dE/E = 1326 \pm 15 \text{ barn.}$$

Bei der Bestimmung des Absolutwertes von Resonanz-Absorptionsintegralen wird Gold oft als Standard benutzt, weil es nur *ein* Isotop besitzt und für das Resonanz-Absorptionsintegral praktisch nur die erste bei ~ 4.9 eV gelegene Resonanz verantwortlich ist. Außerdem ist der Wert des Resonanzintegrals ziemlich groß und führt somit zu einem kleinen „Cadmium-Verhältnis“. Dies vereinfacht die Verwendung von Messungen des Cd-Verhältnisses zum Vergleich von Resonanzintegralen anderer Elemente mit demjenigen von Gold.

Eine Möglichkeit, den Absolutwert des Resonanzintegrals zu finden, besteht darin, den Wirkungsquerschnitt gegen den Logarithmus der Energie aufzutragen und das Integral über das Resonanzgebiet

zu bilden. Auf diese Art wurde der Wert 1296 barn für das Resonanzintegral von Gold gefunden¹. Da jedoch das Auflösungsvermögen von Neutronenspektrometern vergleichbar mit der Breite der Resonanzkurve ist, erscheint es zweifelhaft, ob diese Methode sehr genau ist. Auch die sogenannte Methode des „Standard-Pile“ wurde verwendet², aber in diesem Fall hängt die Genauigkeit des Ergebnisses davon ab, wie genau die Bremseigenschaften des Reaktors bekannt sind.

Im folgenden wird versucht, den Absolutwert des Resonanz-Absorptionsintegrals von Gold durch Vergleich des „Cd-Verhältnisses“ von Gold mit dem eines reinen $1/v$ -Absorbers zu bestimmen, wobei es notwendig ist, die Kenntnis des Wirkungsquer-

* Beurlaubt aus dem Institut za Nuklearne Nauke „Boris Kidrič“, Beograd.

¹ S. P. Harris, C. O. Muelhause u. G. E. Thomas, Phys. Rev. **79**, 11 [1950].

² L. Seren, H. N. Friedlander u. S. H. Turkel, Phys. Rev. **72**, 888 [1947].